Algoritmizace

Marko Genyk-Berezovskyj, Daniel Průša

2010 – 2024

Dnešní témata

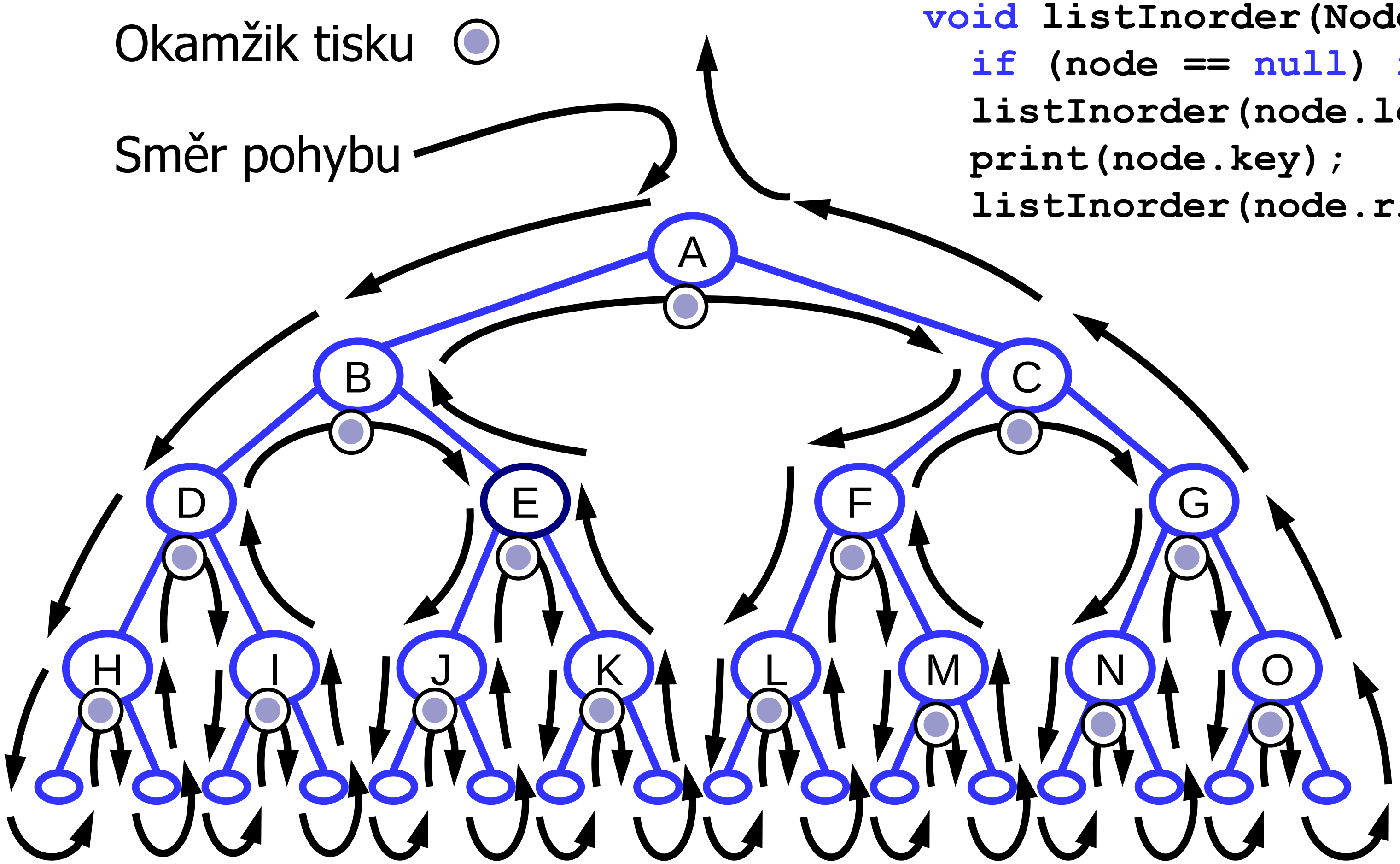
- Průchod stromem do šířky
- Průchod grafem do hloubky a do šířky
- Čtvrtá domácí úloha

Úvodní zvolání

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Z minula: průchod stromem do hloubky

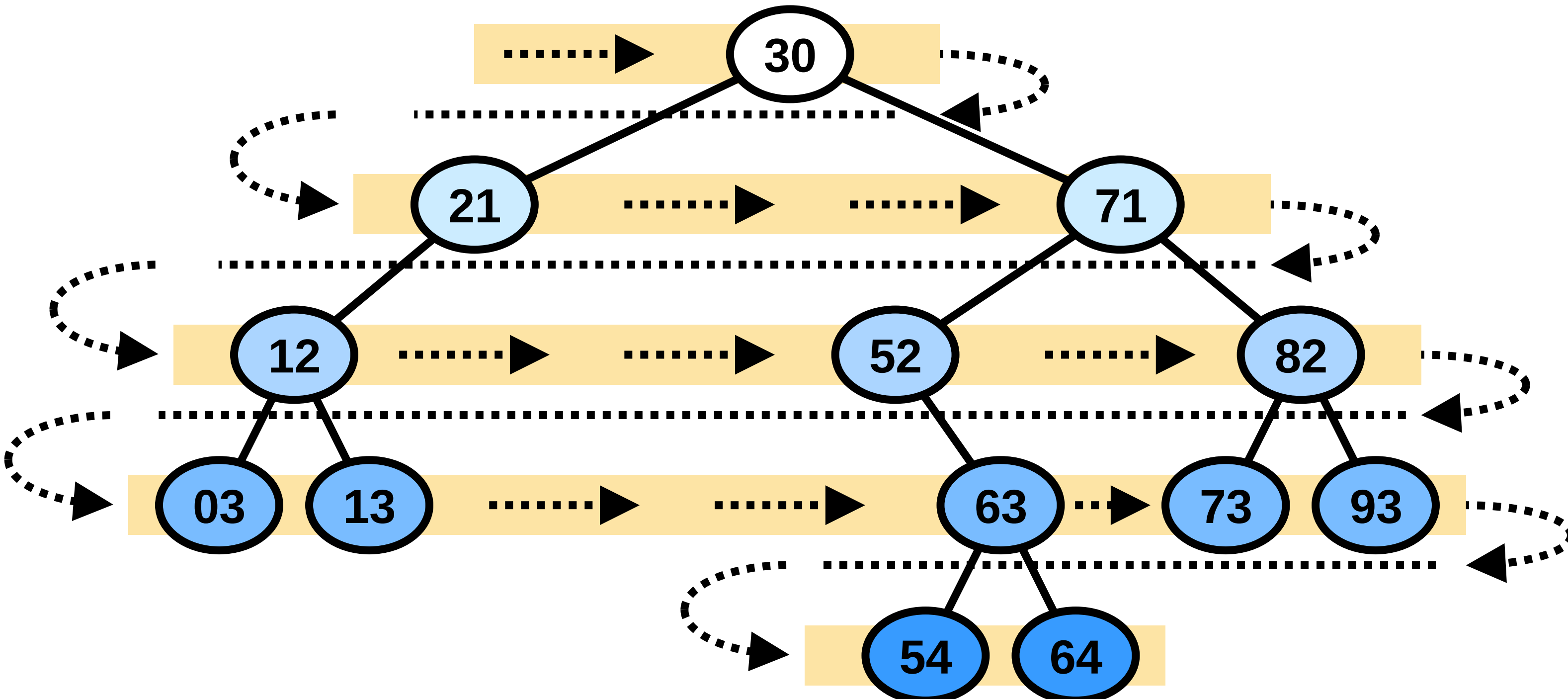
```
void listInorder(Node node):
  if (node == null) return;
  listInorder(node.left);
  print(node.key);
  listInorder(node.right);
```



Výstup

H D I B J E K A L F M C N G O

Průchod stromem do šířky

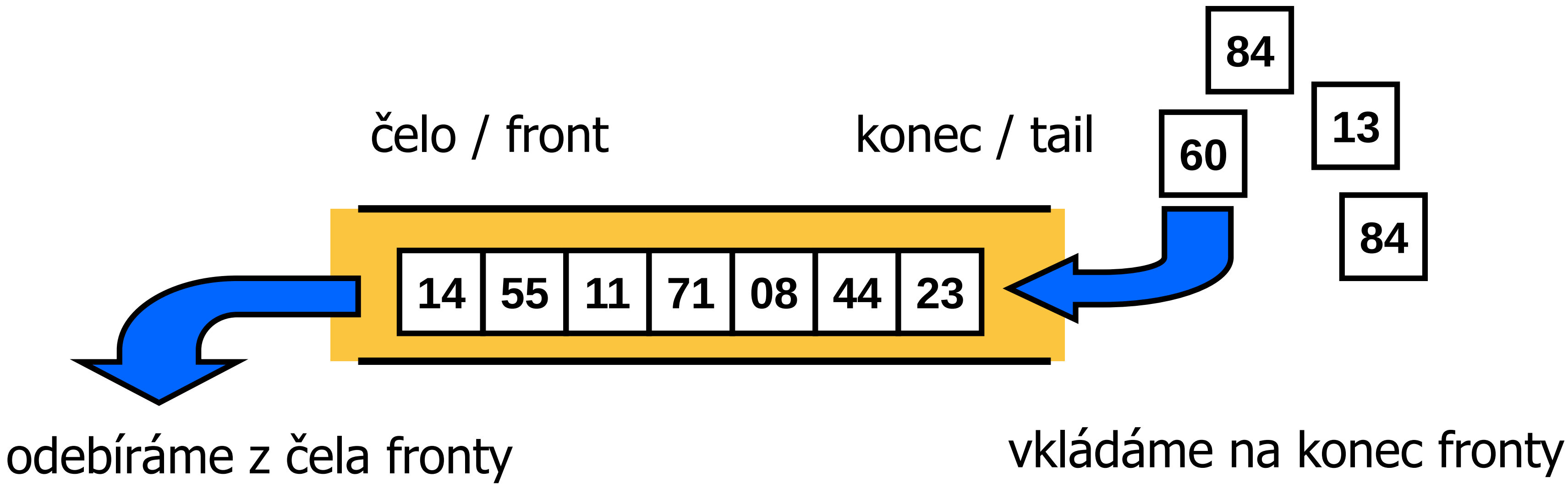


Pořadí uzlů

30	21	71	12	52	82	03	13	63	73	93	54	64

Struktura stromu ani rekurzivní přístup tento průchod nepodporují.

Fronta



`java.util.LinkedList`

```
addLast(element)
removeFirst()
getFirst()
isEmpty()
```

`queue` (C++ Standard Template Library)

```
queue::push(element)
queue::pop()
queue::front()
queue::empty()
```

Cyklická implementace fronty polem

Prázdná fronta
v poli pevné délky

Vlož 24, 11, 90, 43, 70.

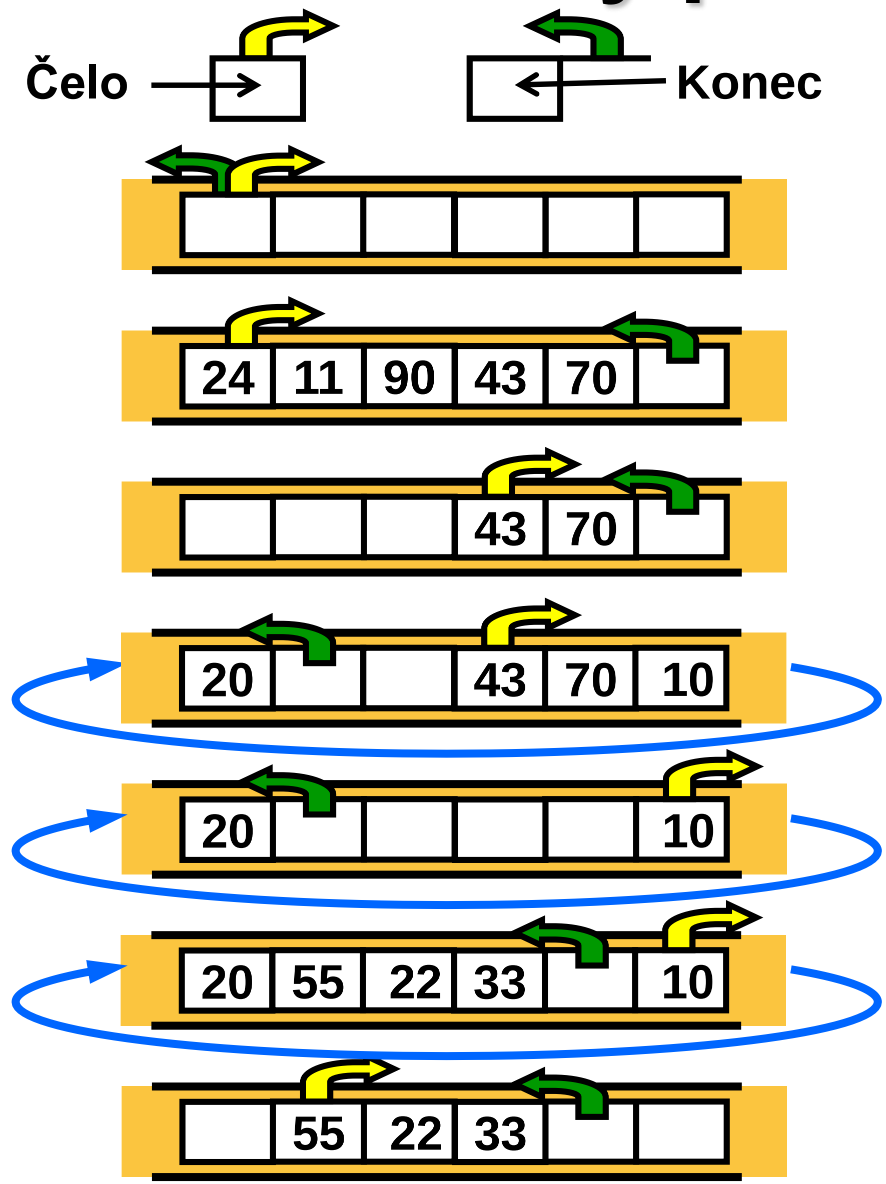
Odeber, odeber, odeber.

Vlož 10, 20.

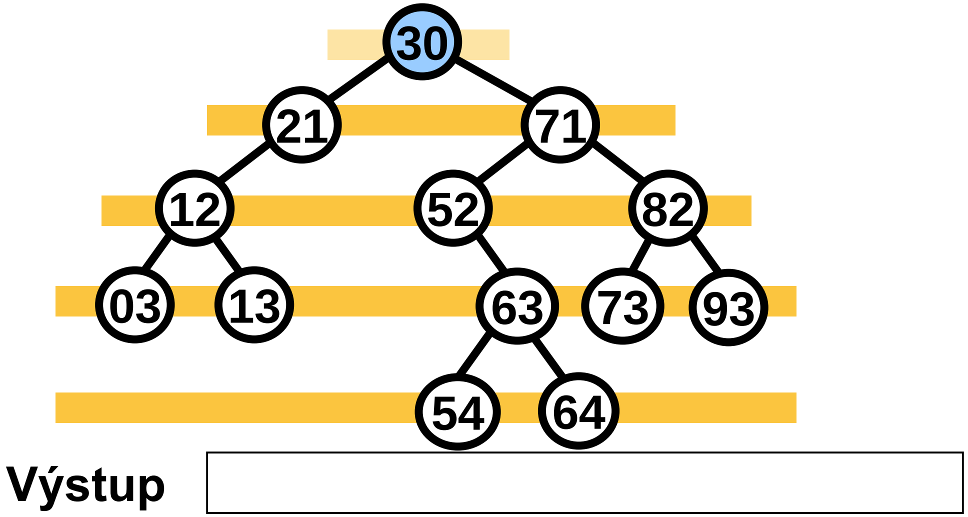
Odeber, odeber.

Vlož 55, 22, 33.

Odeber, odeber.



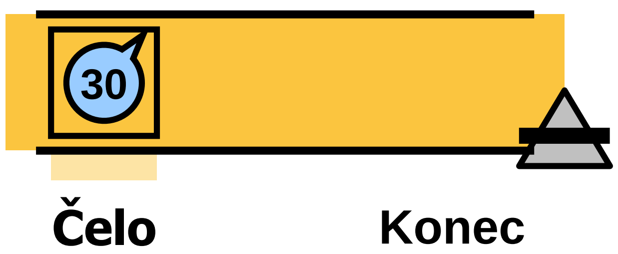
Průchod stromem do šířky



Inicializace:

Vytvoř prázdnou frontu

Do fronty vlož kořen stromu

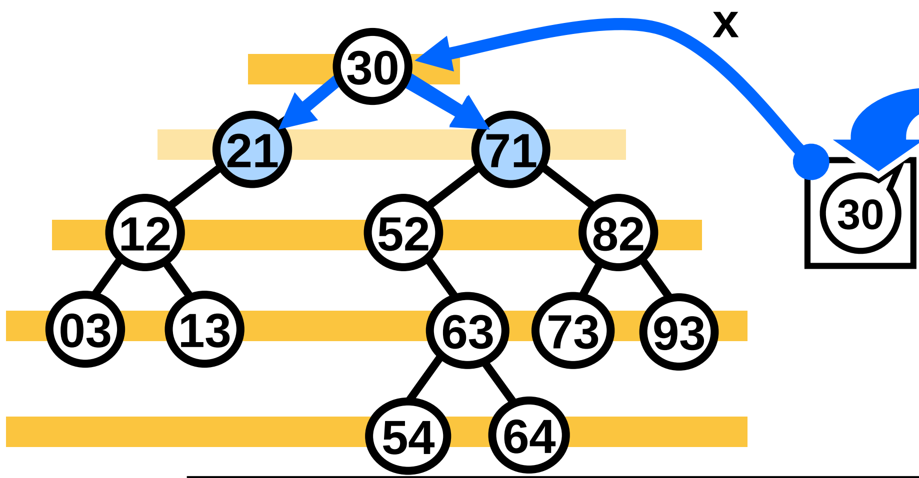


Hlavní cyklus

Dokud není fronta prázdná, opakuj:

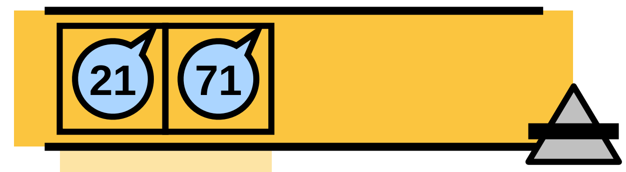
1. **Odeber první uzel z fronty a zpracuj ho.**
2. **Do fronty vlož jeho potomky, pokud existují.**

Průchod stromem do šířky

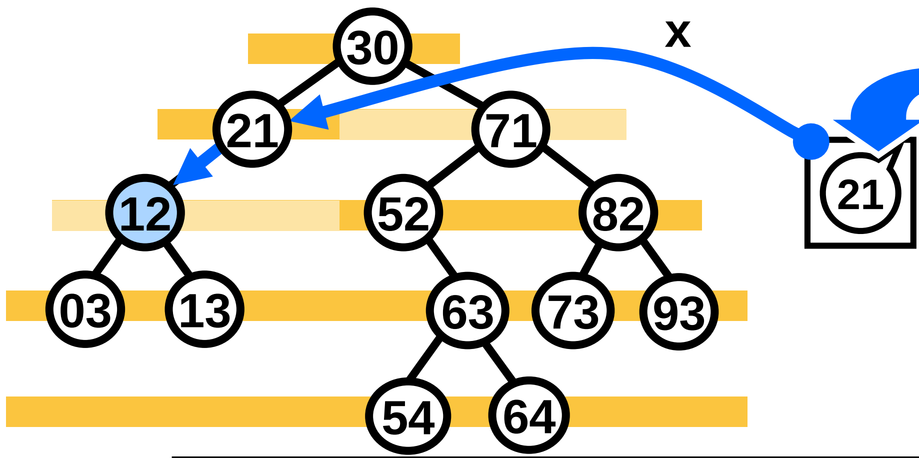


1. x = Odeber(), tisk(x.key).

2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)

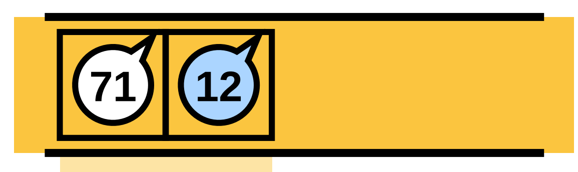


Výstup 30



1. x = Odeber(), tisk(x.key).

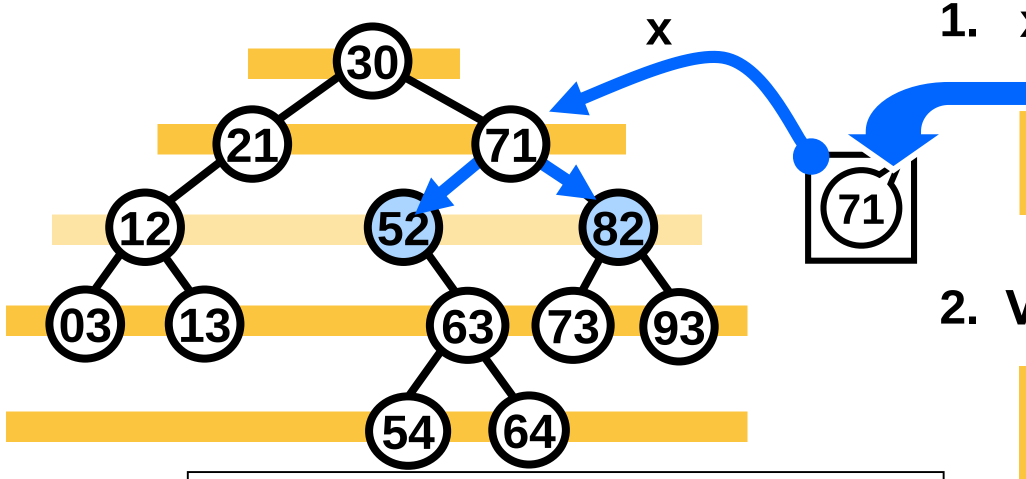
2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)



Výstup 30 21

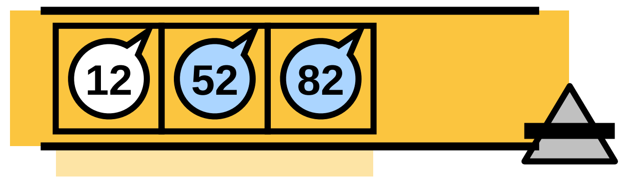
*) pokud existuje

Průchod stromem do šířky

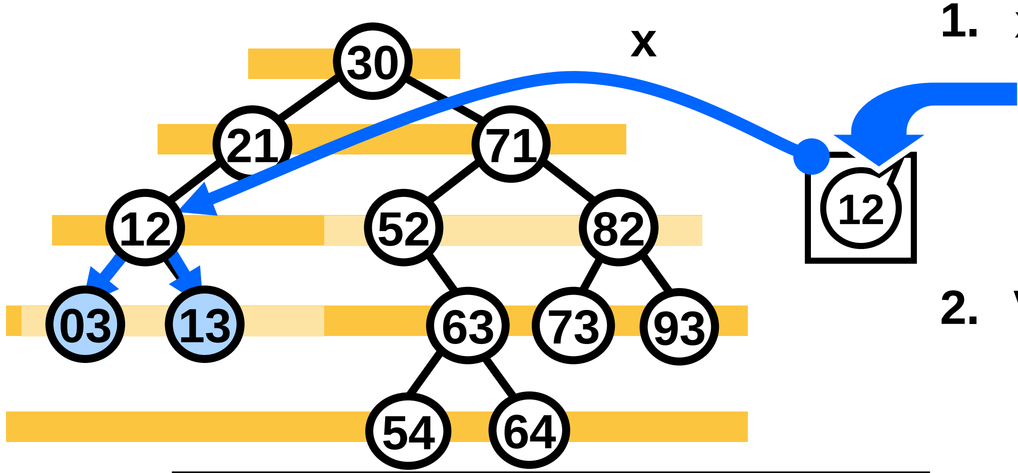


1. x = Odeber(), tisk(x.key).

2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)

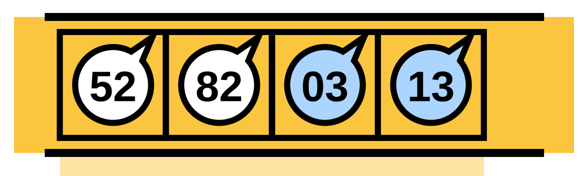


Výstup | 30 21 71



1. x = Odeber(), tisk(x.key).

2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)

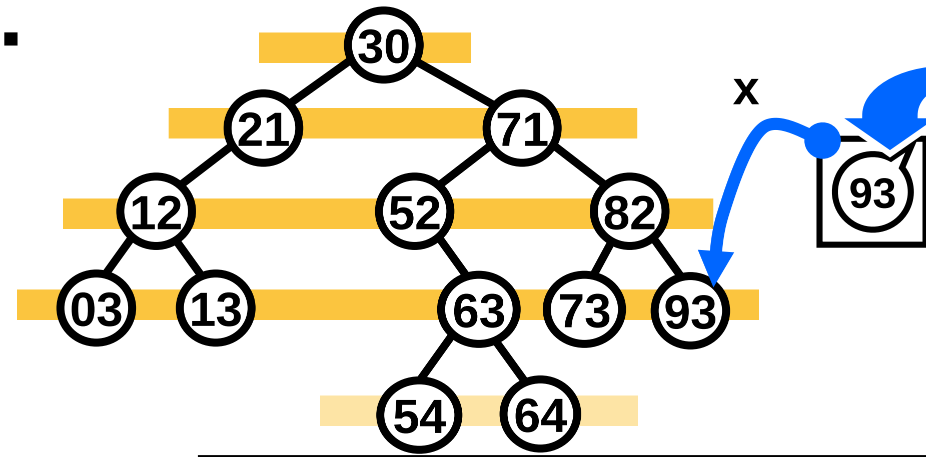


Výstup | 30 21 71 12

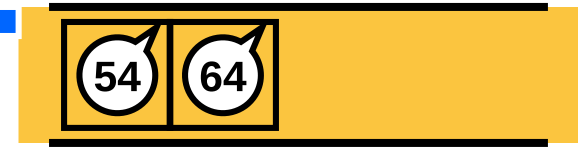
*) pokud existuje

Průchod stromem do šířky

...

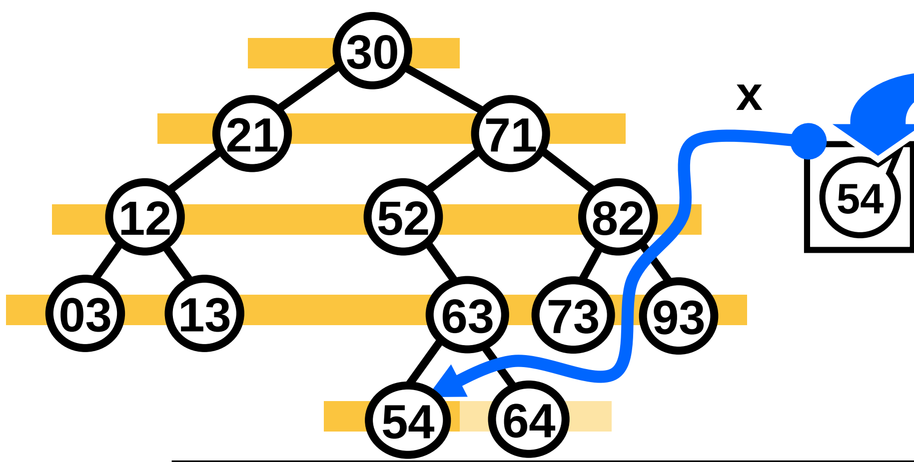


1. x = Odeber(), tisk(x.key).



2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)

Výstup 30 21 71 12 52 82 03 13 63 73 93



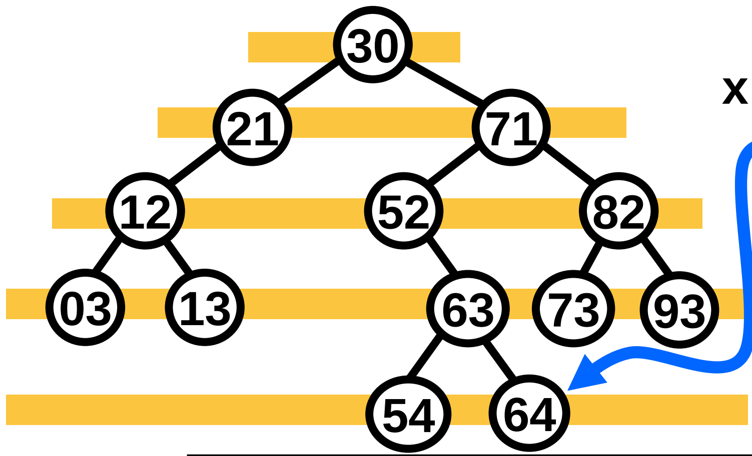
1. x = Odeber(), tisk(x.key).

2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)

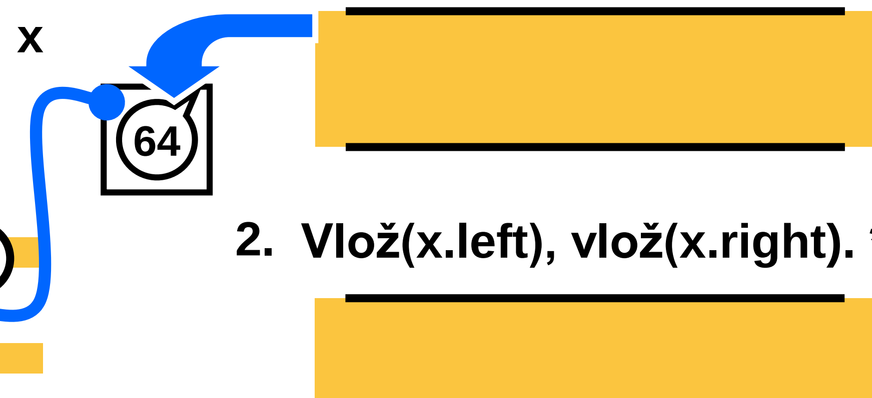
Výstup 30 21 71 12 52 82 03 13 63 73 93 54

*) pokud existuje

Průchod stromem do šířky



1. x = Odeber(), tisk(x.key).



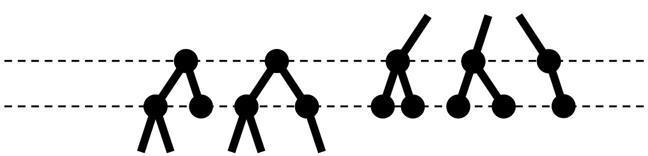
2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)

*) pokud existuje

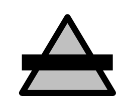
Výstup 30 21 71 12 52 82 03 13 63 73 93 54 64

**Fronta je prázdná,
průchod stromem končí.**

V neprázdné frontě jsou vždy právě
-- některé (třeba všechny) uzly jednoho patra
-- a všichni potomci těch uzlů tohoto patra, které už nejsou ve frontě.



Někdy jsou ve frontě přesně všechny uzly jednoho patra. Viz výše.



Průchod stromem do šířky

```
void listBreadth (Node node) {
    if (node == null) return;
    Queue q = new Queue();              // create queue
    q.push(node);                       // init queue
    while (!q.empty()) {
        node = q.pop();
        print(node.key);                // process node
        if (node.left  != null) q.push(node.left);
        if (node.right != null) q.push(node.right);
    }
}
```

? Jakou má průchod stromem do šířky časovou složitost?

slido

Jakou má průchod do šířky stromem s 'n' uzly časovou složitost?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Průchod grafem

Průchody stromem zobecníme pro orientované i neorientované grafy.

$G_1 = (V, E_1)$

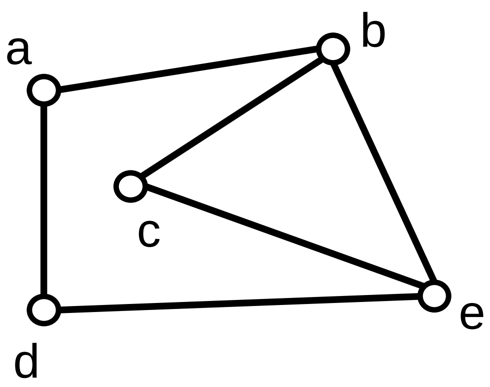
$V = \{a, b, c, d, \mathrm{e}\}$

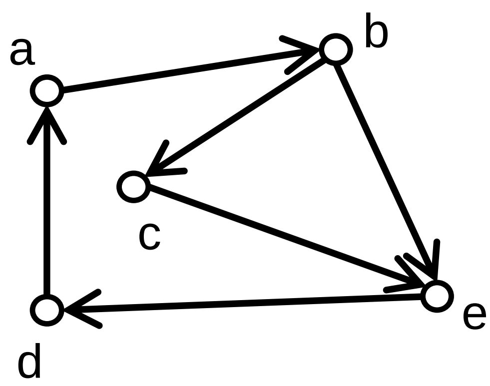
$$E_1 = \left\{ \begin{matrix} \{a,b\}, \{b,c\}, \{b,e\}, \\ \{e,c\}, \{d,e\}, \{a,d\} \end{matrix} \right\}$$

$G_2 = (V, E_2)$

$V = \{a, b, c, d, \mathrm{e}\}$

$$E_2 = \left\{ \begin{matrix} (a,b), (b,c), (b,e), \\ (c,e), (e,d), (d,a) \end{matrix} \right\}$$





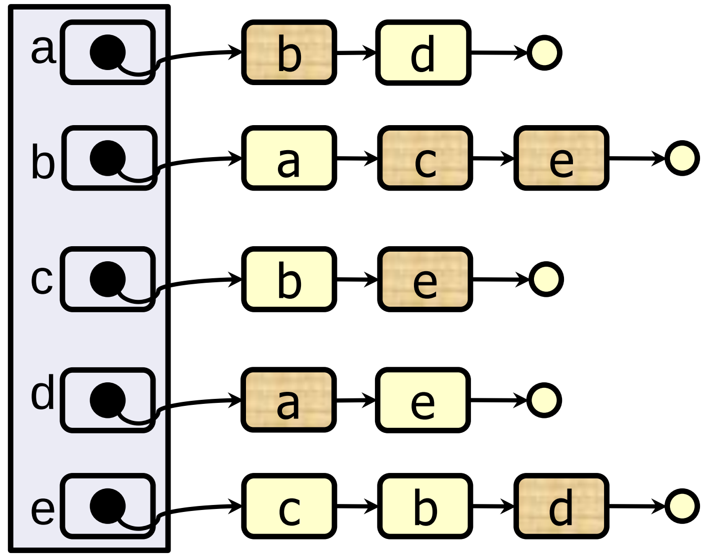
Použití: hledání komponent souvislosti, cyklů, hranově nejkratší cesty, …

Reprezentace grafu v paměti

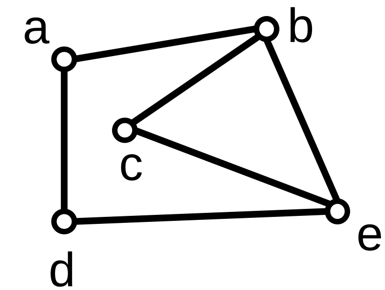
Matice sousednosti:

	a	b	c	d	e
a	0	**1**	0	**1**	0
b	**1**	0	**1**	0	**1**
c	0	**1**	0	0	**1**
d	**1**	0	0	0	**1**
e	0	**1**	**1**	**1**	0

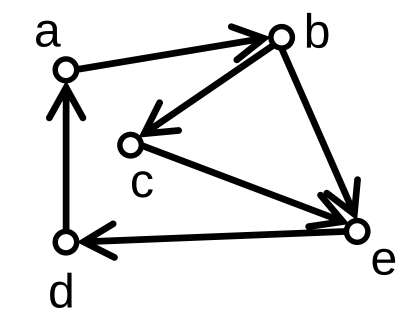
Seznam sousedů:



$G_1 = (V, E_1)$



$G_2 = (V, E_2)$



Reprezentace grafu G_2 obsahuje pouze prvky s pozadím

Prostorová složitost

$\Theta(|V|^2)$

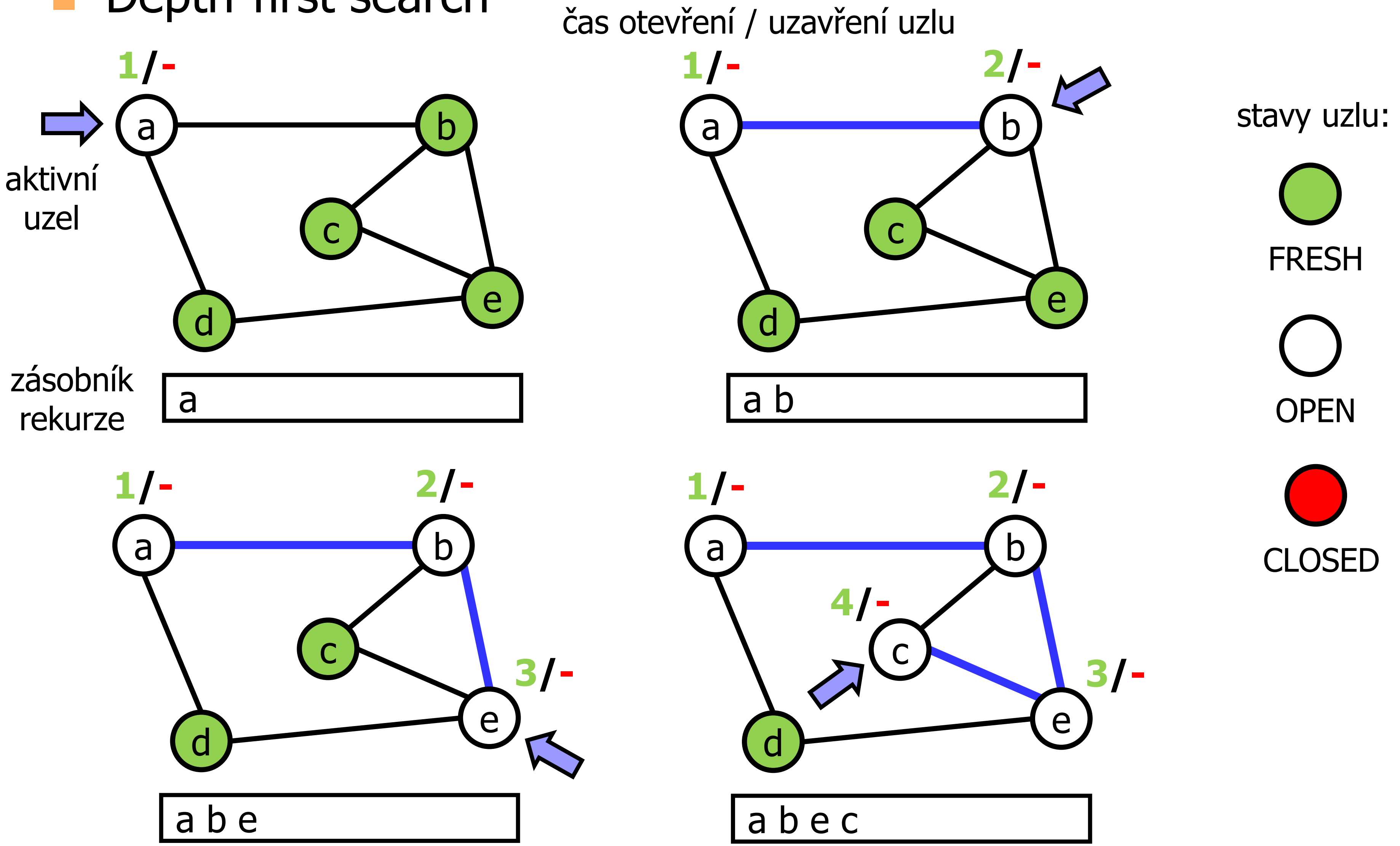
test existence hrany v konstantním čase

$\Theta(|V| + |E|)$

výhodnější pro řídké grafy

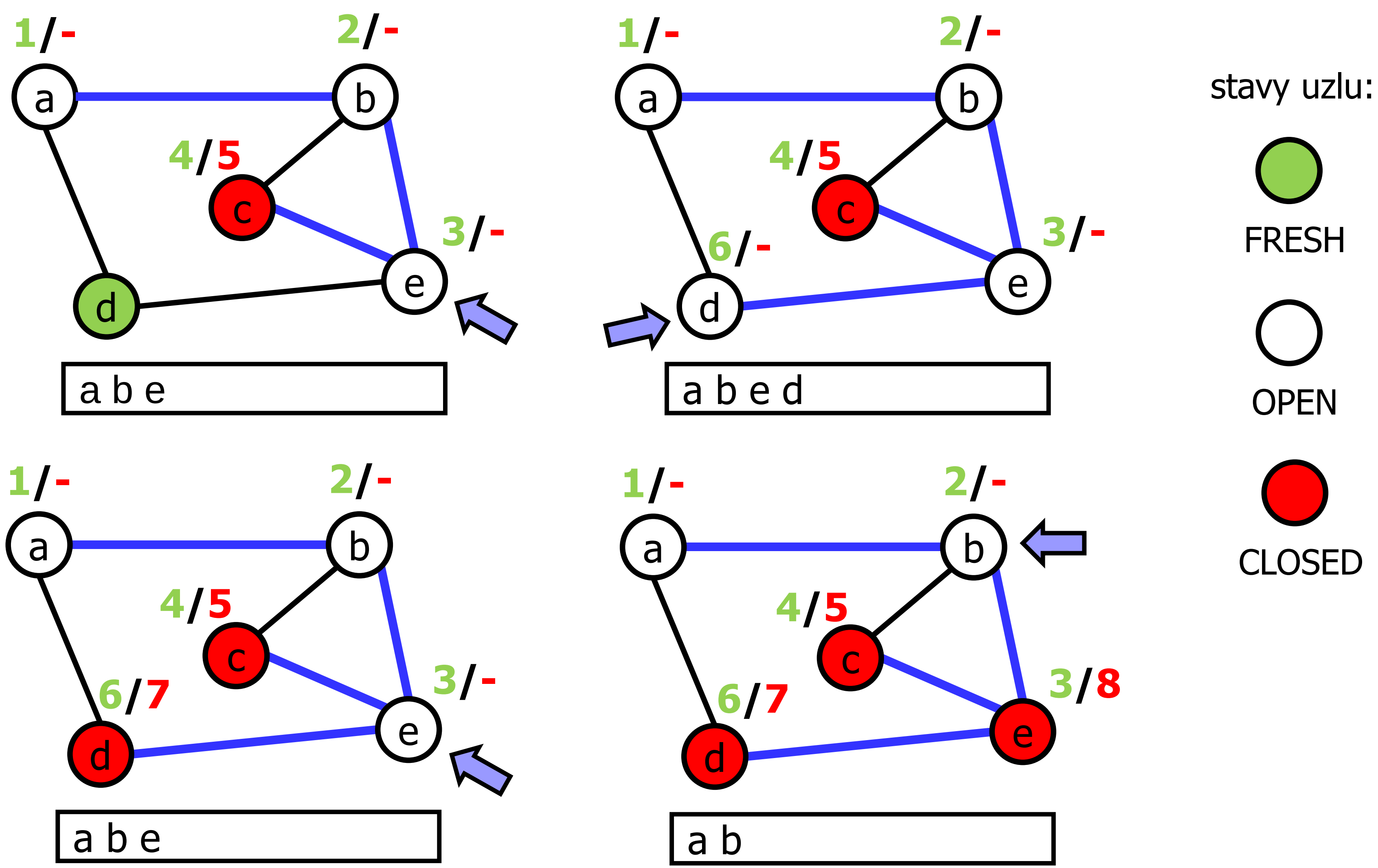
Průchod grafem do hloubky (DFS)

- Depth-first search



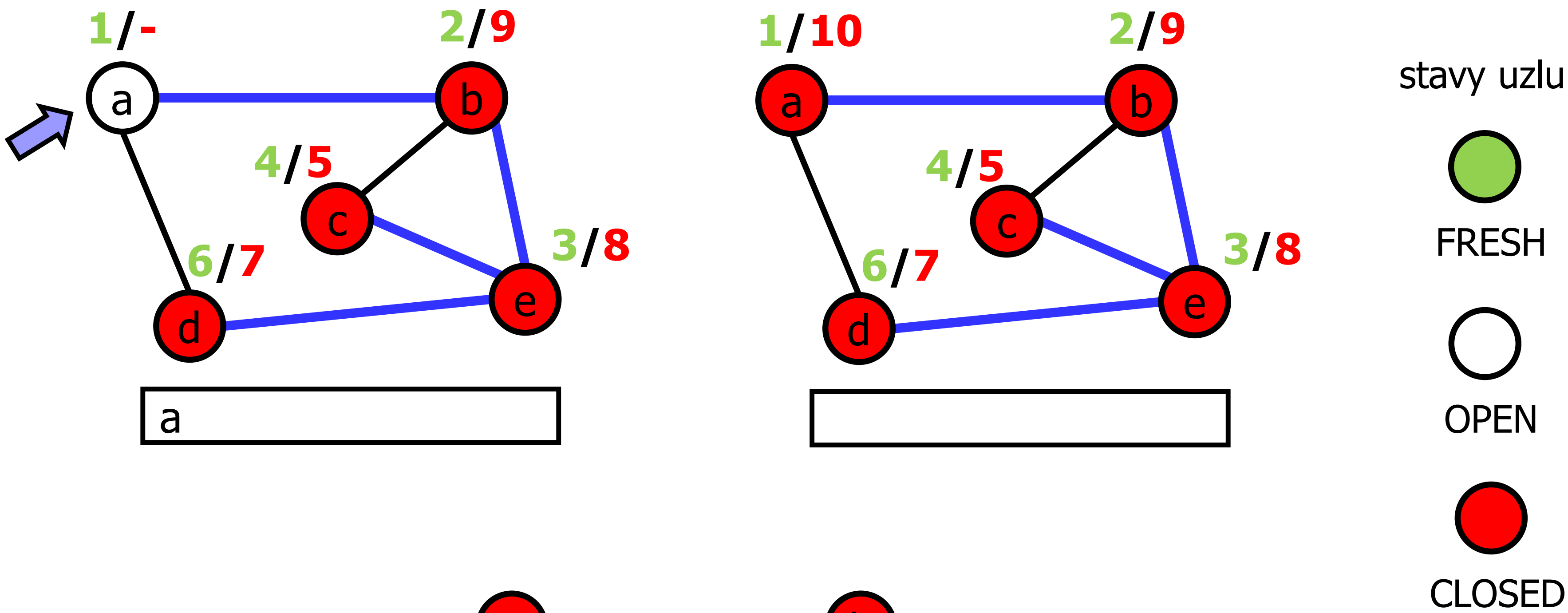
Průchod grafem do hloubky (DFS)

- Depth-first search

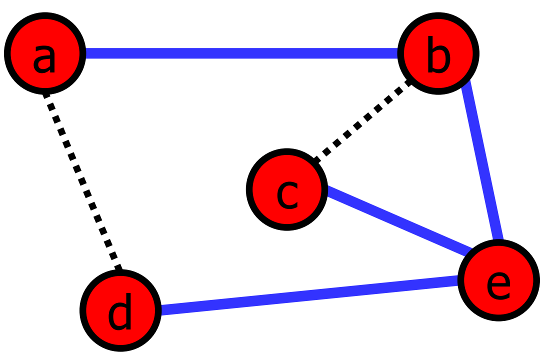


Průchod grafem do hloubky (DFS)

- Depth-first search



DFS-strom:



DFS rekurzivně

```
DFS(Node node): // průchod jednou komponentou
    node.visited = true;
    foreach n in node.neighbors do
        if !n.visited then
            DFS(n);
        end;
    end;


DFS(Node[] nodes): // průchod celým grafem
    foreach node in nodes do
        if !node.visited then
            DFS(node);
        end;
    end;
```

DFS se zásobníkem

```
DFS_iterative(Node node):
   S = new Stack();
   S.push(node);
   while !S.isEmpty() do
      node = S.pop();
      if !node.visited then
         node.visited = true;
         foreach n in node.neighbors do
            S.push(n);
```

- jiné pořadí uzlů než při rekurzi
- uzel může být na zásobník vložen opakovaně

simuluje rekurzi

```
DFS_iterative2(Node node):
   S = new Stack();
   S.push(new Iterator(node.neighbors));
   while !S.isEmpty() do
      if S.peek().hasNext() then
         n = S.peek().next();
         if !n.visited then
            n.visited = true;
            S.push(new Iterator(node.n));
      else
         node = S.pop();
```

Časová složitost DFS

Která z následujících možností nejlépe popisuje časovou složitost DFS pro graf $G = (V, E)$?

A. $O(|E|)$

B. $O(|V| + |E|)$

C. $O(|V|^2)$

D. $O(|V| \cdot |E|)$

slido

Jakou má DFS časovou složitost pro graf G=(V,E)?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Časová složitost DFS

```
DFS(Node node):
    node.visited = true;
    foreach n in node.neighbors do
        if !n.visited then
            DFS(n);
        end;
    end;
```

```
DFS(Node[] nodes):
    foreach node in nodes do
        if !node.visited then
            DFS(node);
        end;
    end;
```

$G = (V, E)$ reprezentovaný jako seznam sousedů

$$T(|V|, |E|) = O\left(|V| + \sum_{v \in V} \mathrm{d}_v\right) = O(|V| + 2|E|) = O(|V| + |E|)$$

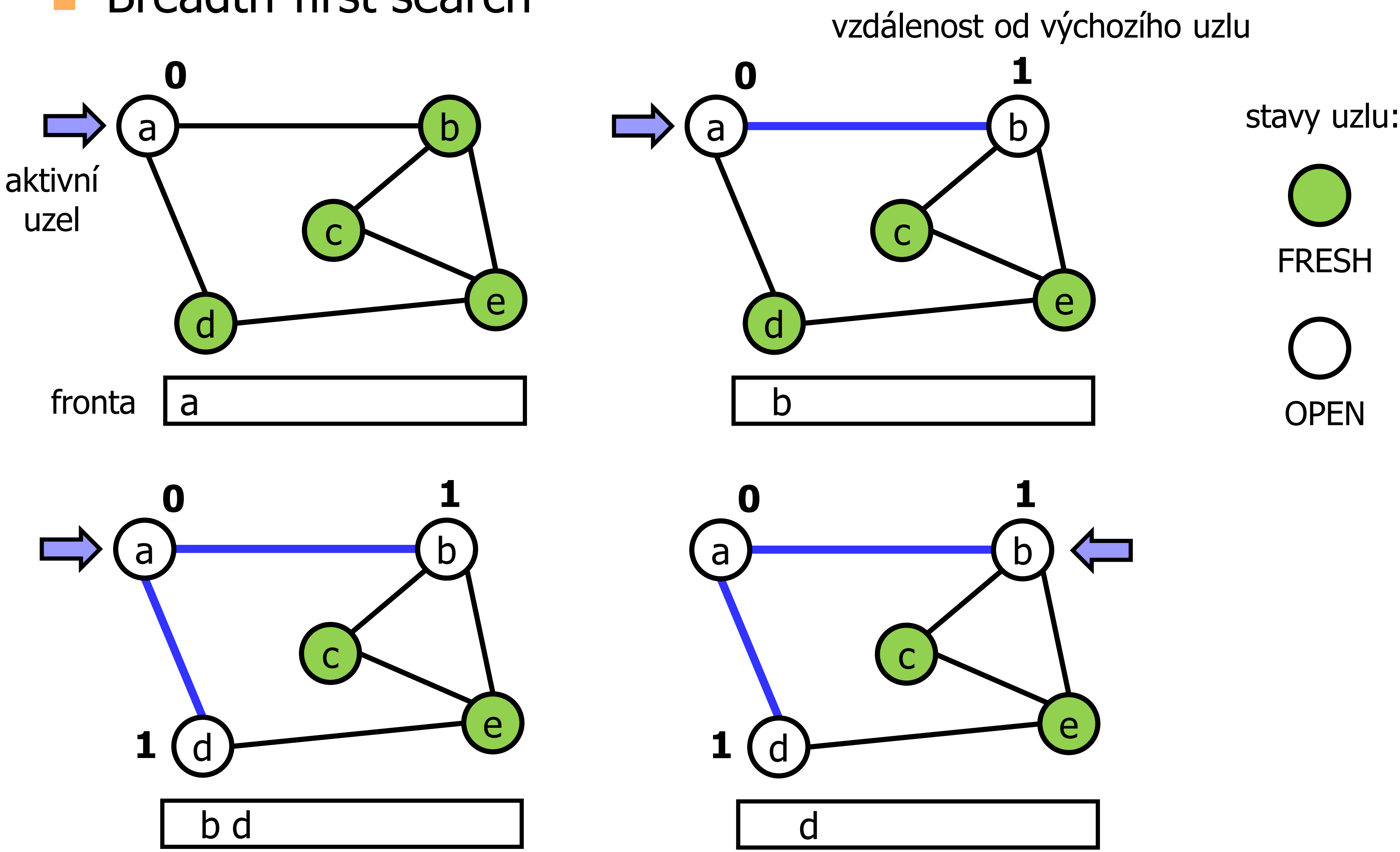
slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

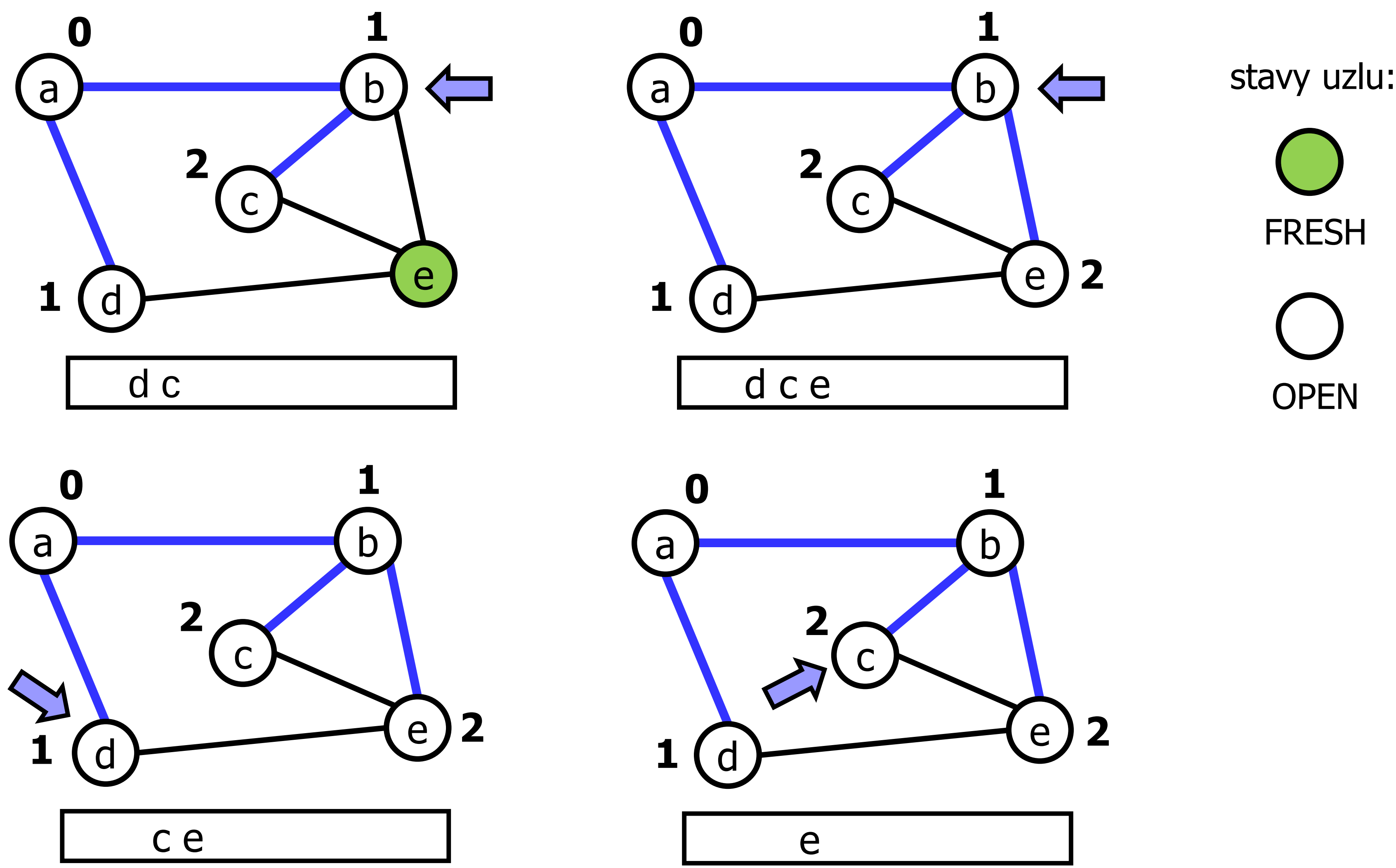
Průchod grafem do šířky (BFS)

- Breadth-first search



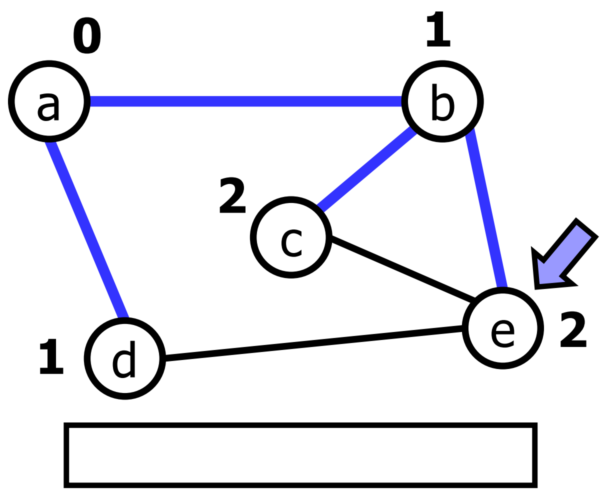
Průchod grafem do šířky (BFS)

- Breadth-first search

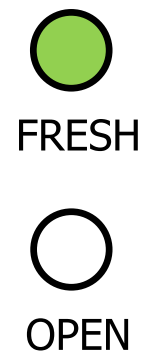


Průchod grafem do šířky (BFS)

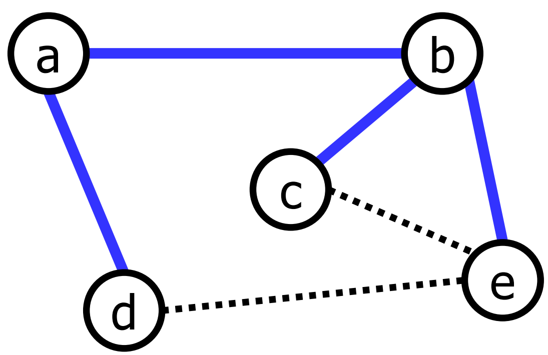
- Breadth-first search



stavy uzlu:



BFS-strom:



BFS s frontou

```
BFS(Node node): // průchod jednou komponentou
    Q = new Queue();
    node.discovered = true;
    Q.push(node);
    while !Q.isEmpty() do
        node = Q.pop();
        foreach n in node.neighbors do
            if !n.discovered then
                n.discovered = true;
                Q.push(n);
            end;
        end;
    end;
```

```
BFS(Node[] nodes): // průchod celým grafem
    foreach node in nodes do
        if !node.discovered then
            BFS(node);
        end;
    end;
```

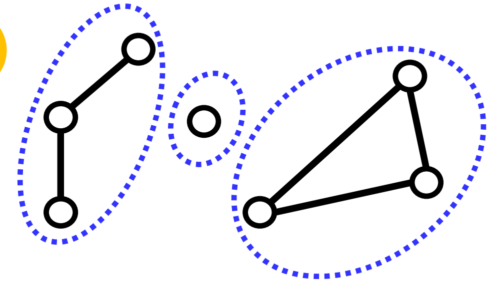
časová složitost je

$O(|V| + |E|)$

Aplikace průchodu grafem

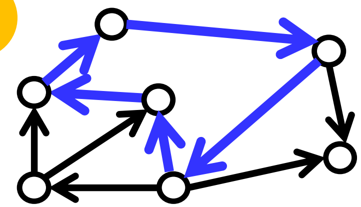
1. Detekce komponent souvislosti

1



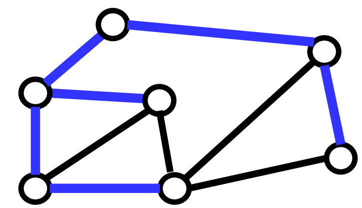
2. Detekce cyklu (jen DFS)
   (pokud při DFS objevíme uzel
   ve stavu OPEN => cyklus)

2



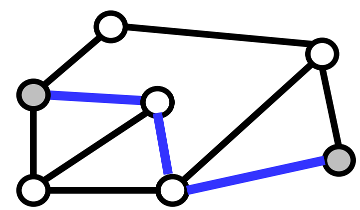
3. Nalezení kostry

3



4. Hranově nejkratší cesta (jen BFS)

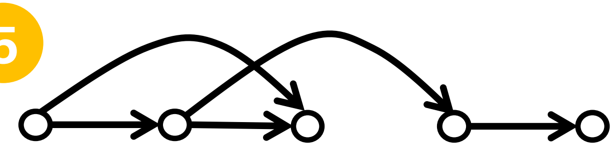
4



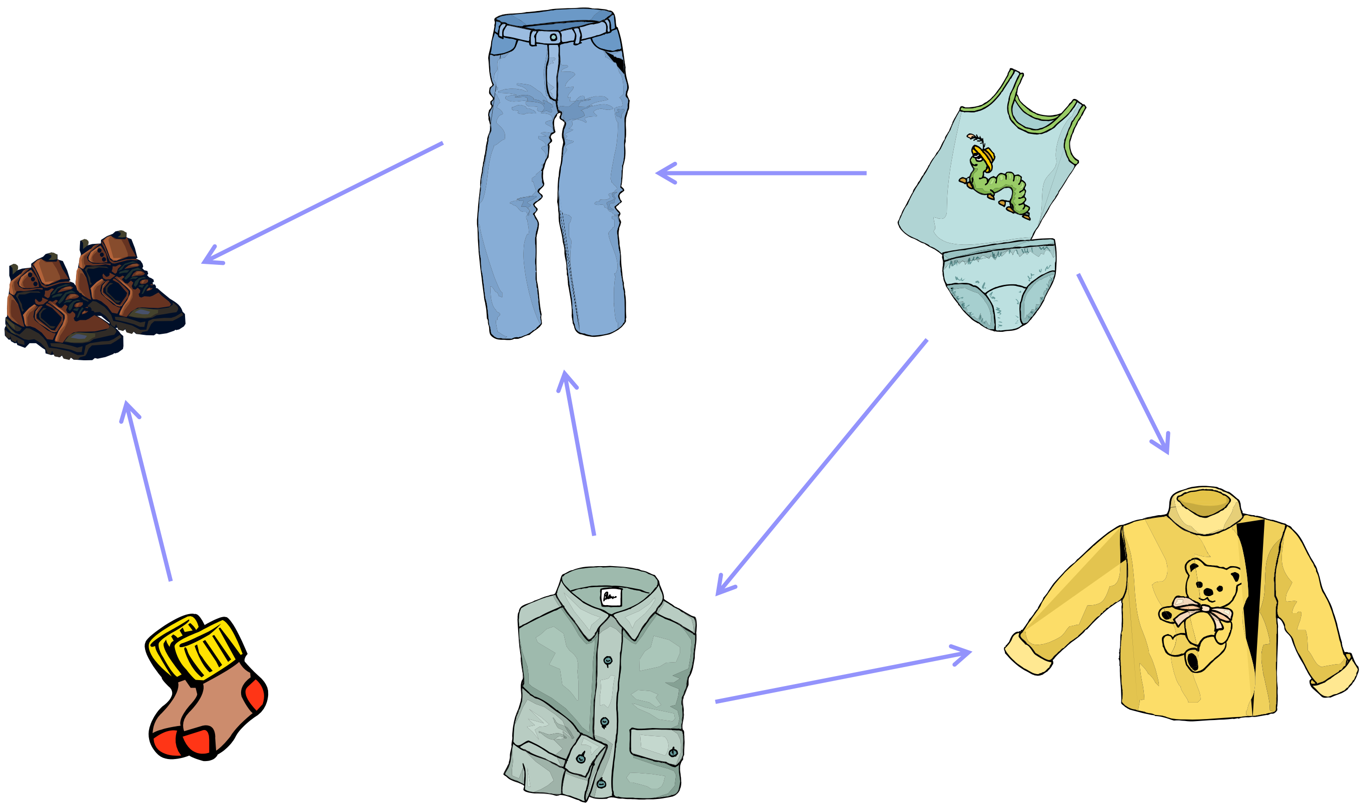
5. Topologické uspořádání (jen DFS)

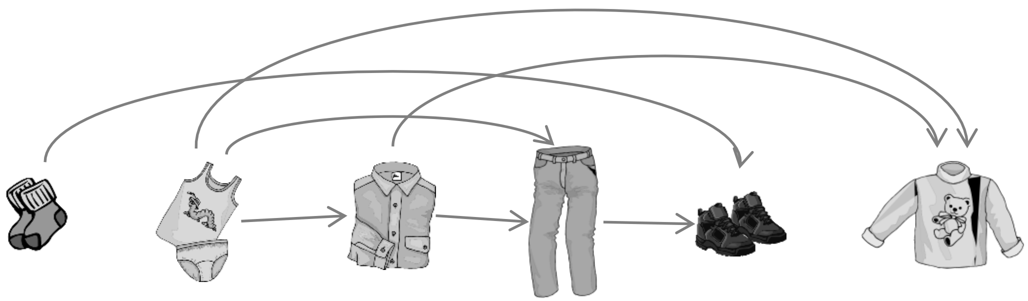
   (uzly uspořádáme sestupně
   podle časů jejich uzavření)

5

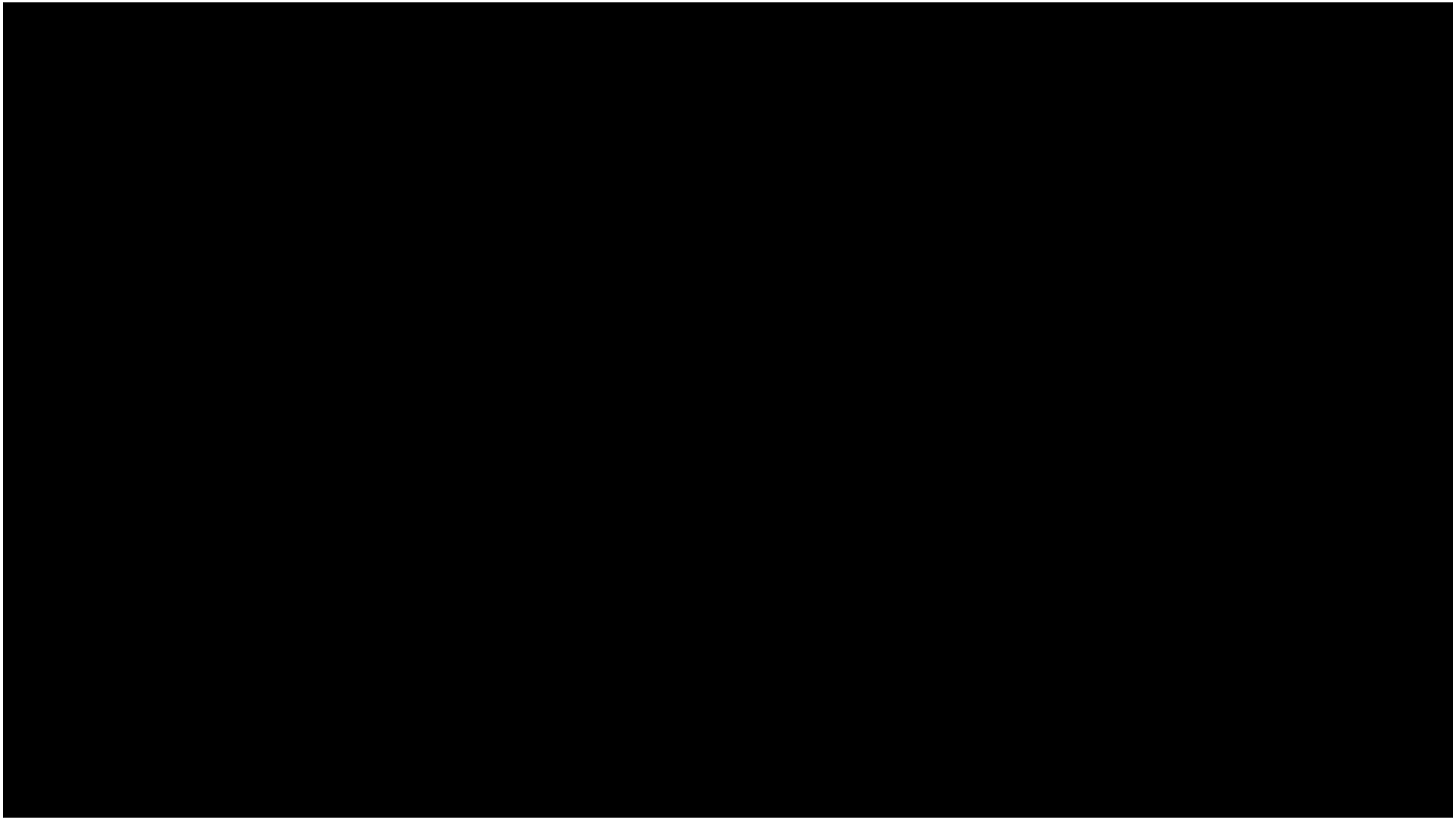


Topologické uspořádání





DFS

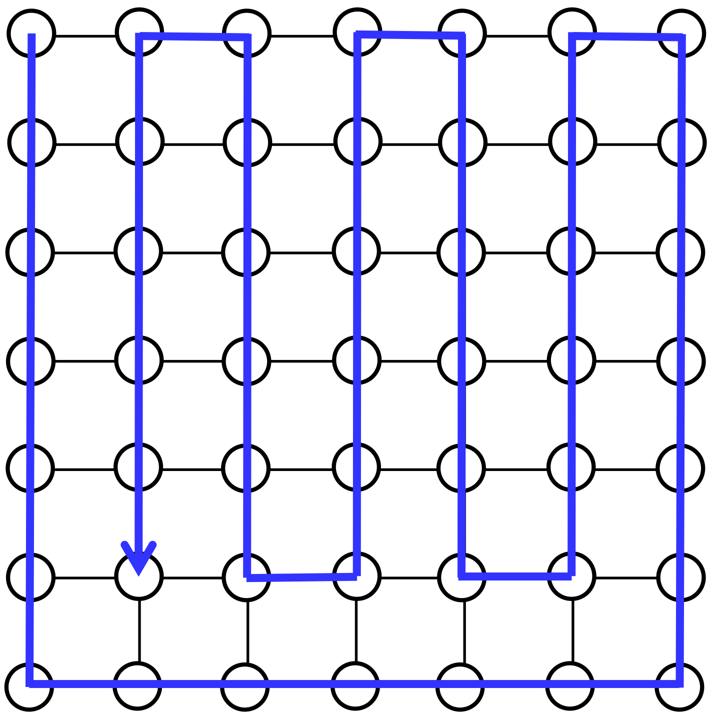


https://youtu.be/NUgMa5coCoE

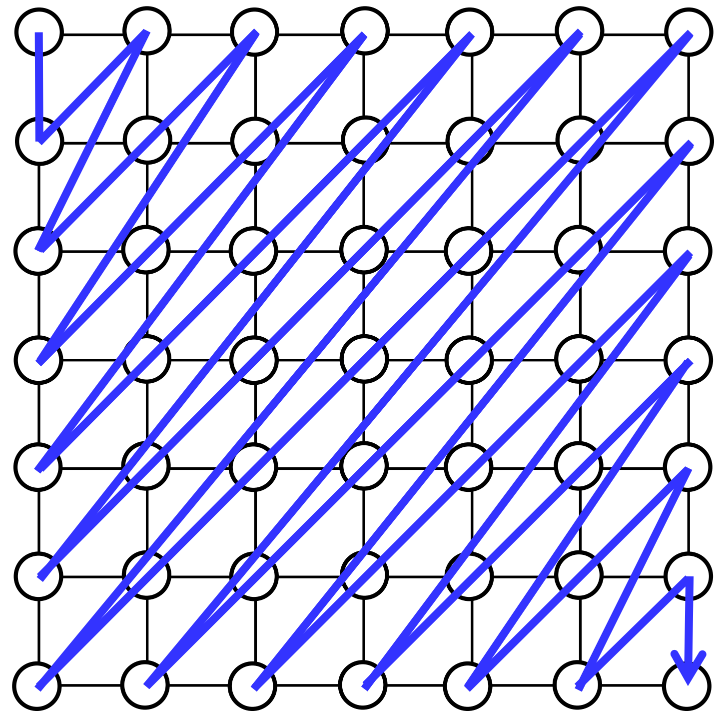
Porovnání DFS a BFS

Mřížka $N \times N$, uspořádání sousedů: ↓ → ↑ ←

DFS (rekurzivně)



BFS

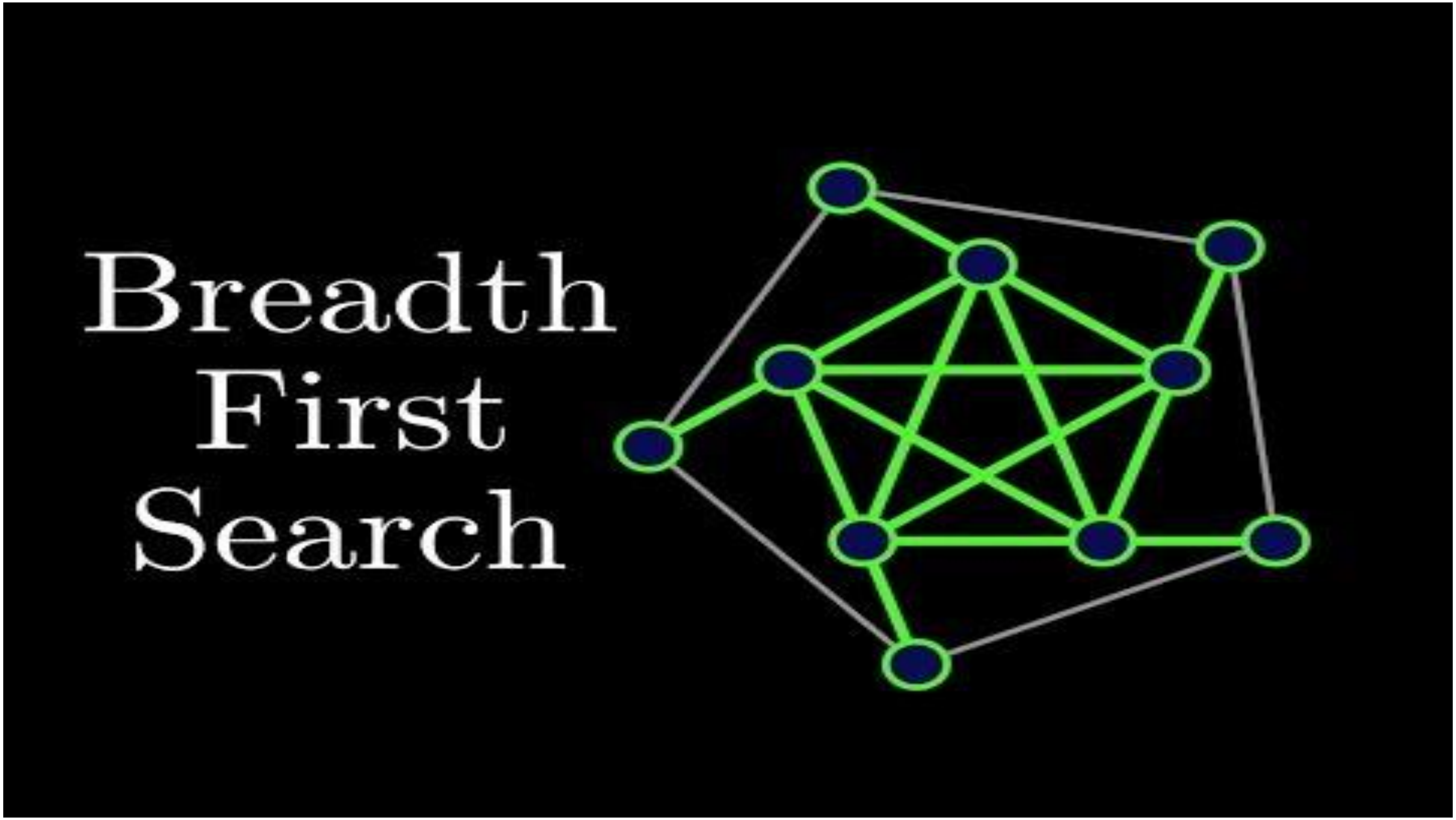


Potřebná velikost zásobníku / fronty:

$\Theta(N^2)$

$\Theta(N)$

BFS



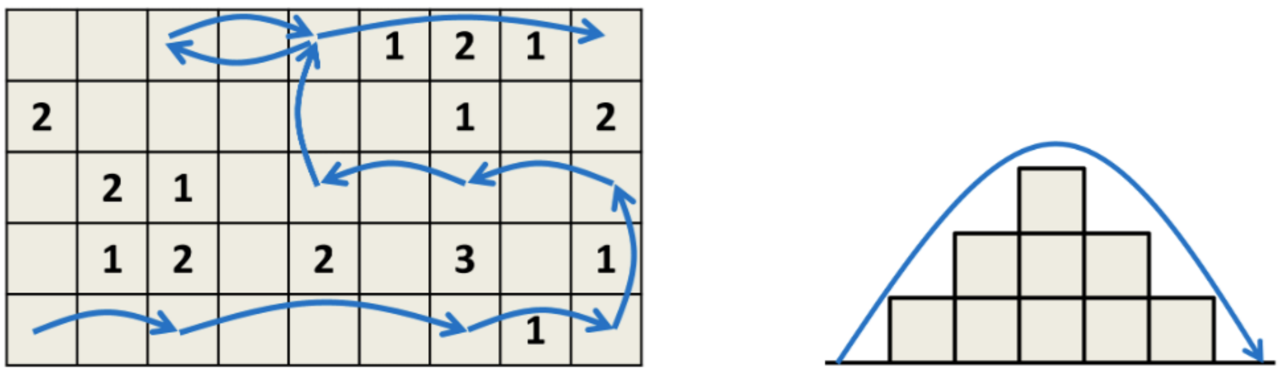
https://www.youtube.com/watch?v=xlVX7dXLS64

slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Čtvrtá domácí úloha



Obrázek 1. Čtvercová mřížka vlevo o rozměrech 5 × 9 reprezentuje plochu s kostkami. Čísla udávají počet kostek položených na sobě na daném poli. Na polích bez čísel kostky nejsou. Pokud se žába pohybuje s maximální rychlostí 2, pak dosáhne pravého horního rohu z výchozí pozice provedením deseti skoků vyznačených modrými šipkami. Jedná se zároveň o postup s minimálním počtem skoků. Všimněme si, že po sedmém skoku nemůže žába ihned skočit do cílového pole, protože k tomu potřebuje skok délky 4 při rychlosti 2, tuto rychlost však může z rychlosti 1 nabrat pouze při zachování směru předchozího skoku. Ilustrace vpravo ukazuje trajektorii skoku žáby při rychlosti 3. Béžové čtverečky zachycují na sebe položené kostky. Pokud na libovolné ze sedmi polí mřížky reprezentovaných spodní úsečkou přidáme kostku navíc, pak žába již daný skok nemůže vykonat, protože by došlo ke kolizi s touto kostkou.

Rychlost R = 1, .., R_{max} délka skoku 2R

slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.