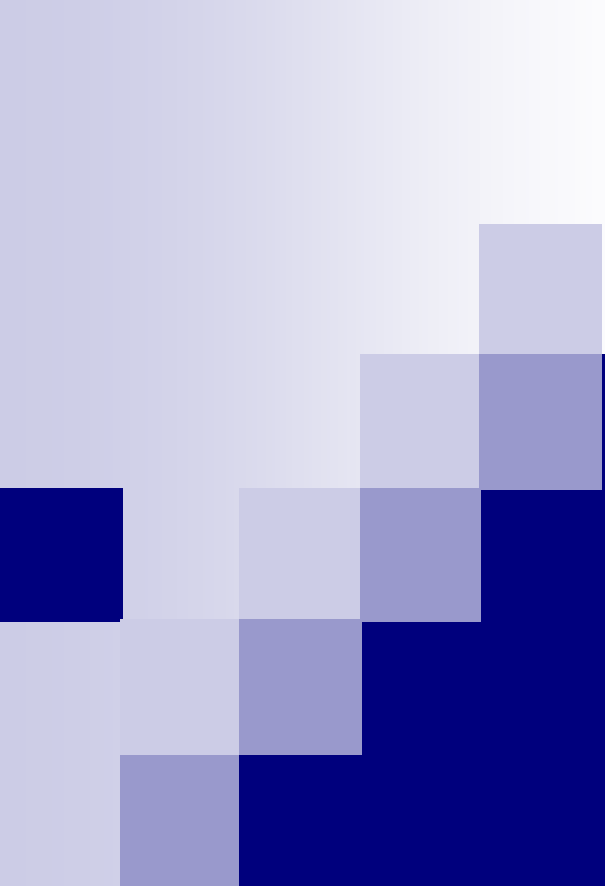




Algoritmizace

Daniel Průša, Robert Pěnička

2025

Dnešní témata

- AVL strom (samovyvažující se BVS)
- B-strom (více klíčů v uzlech)



slido



**Join at slido.com
#543701**

① Start presenting to display the joining instructions on this slide.

slido

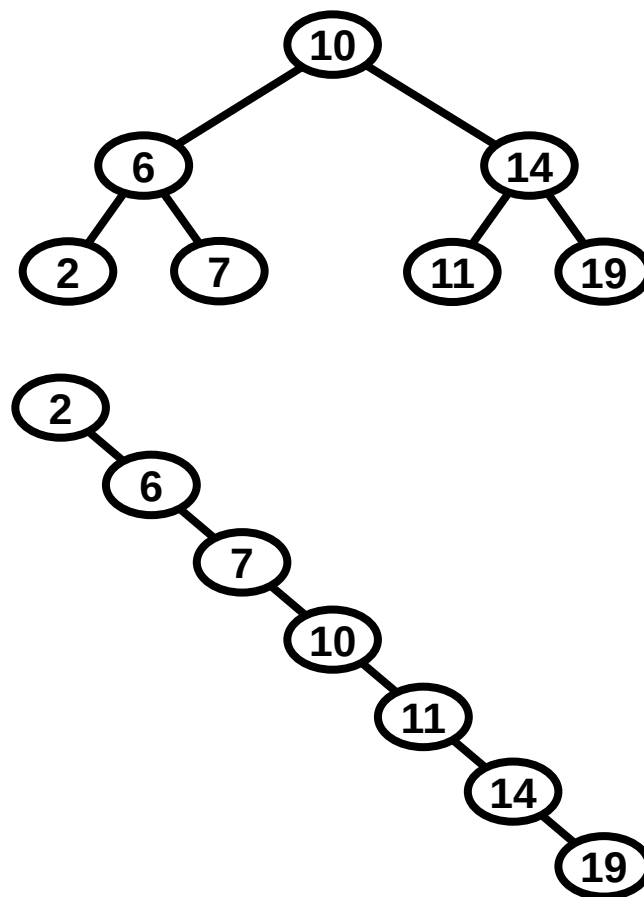


**Vložte obrázek (ikonu,
ASCII art) na téma
"vyvážený strom"**

① Start presenting to display the poll results on this slide.

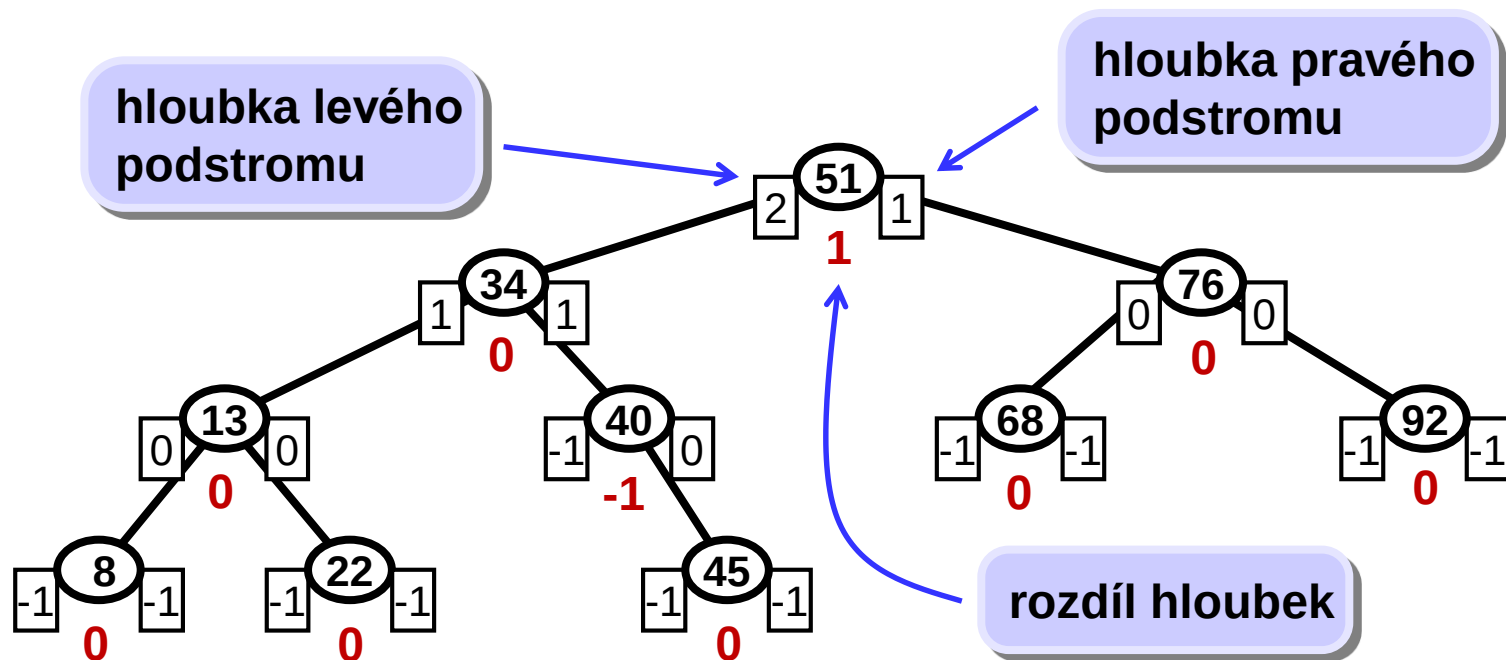
Asymptotická složitost operací v BVS je úměrná maximální hloubce uzlů, které navštívíme.

Operace	BVS s n uzly	
	Obecný	Vyvážený
Find	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$
Insert	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$
Delete	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$



AVL strom

- Autoři: **A**delson-**V**elsky & **L**andis (1962)
- Адельсон-Вельский & Ландис, AVL-дерево
- BVS splňující: pro každý uzel je rozdíl hloubek jeho levého a pravého podstromu roven -1 , 0 nebo 1 .

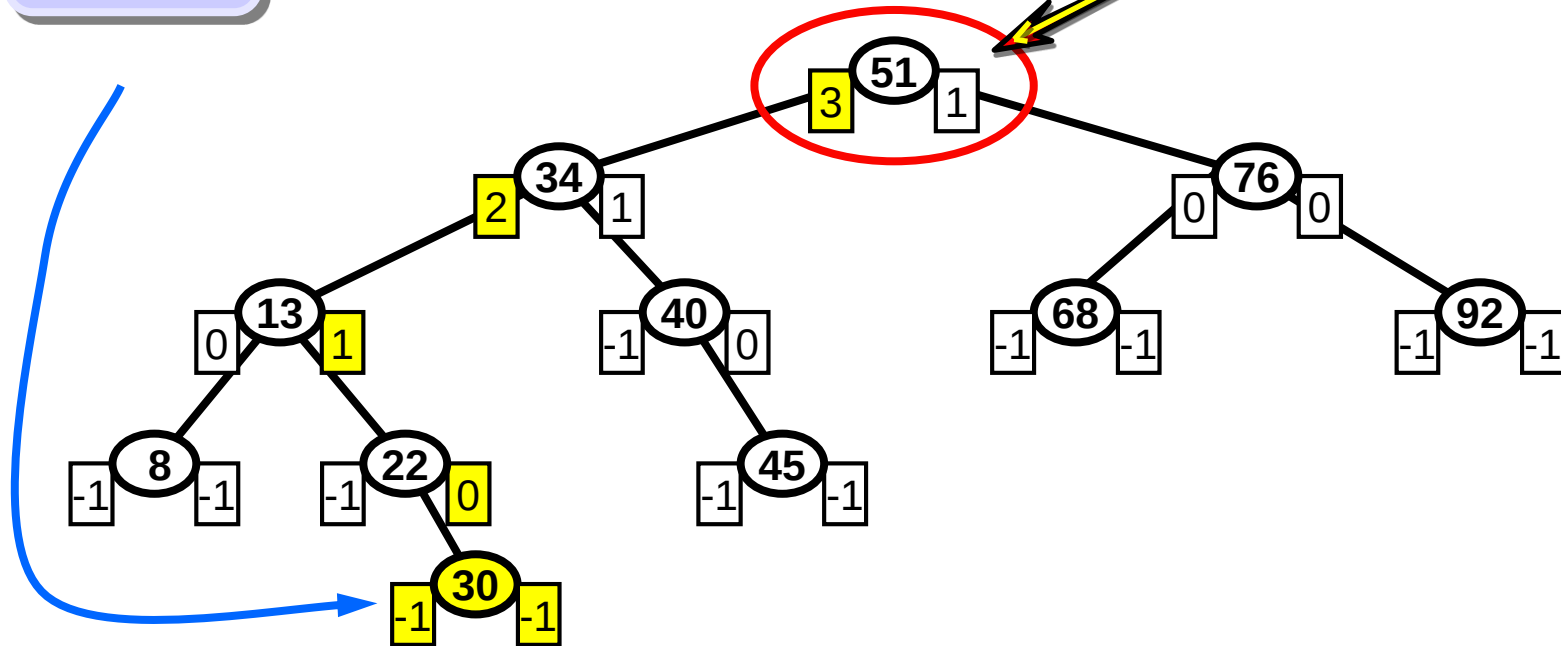


- Hloubka AVL stromu s n uzly není větší než $1.45 \log_2(n + 2)$.

Operace Insert v AVL

V každém uzlu má být rozdíl hloubek obou podstromů roven -1, 0, 1 !!

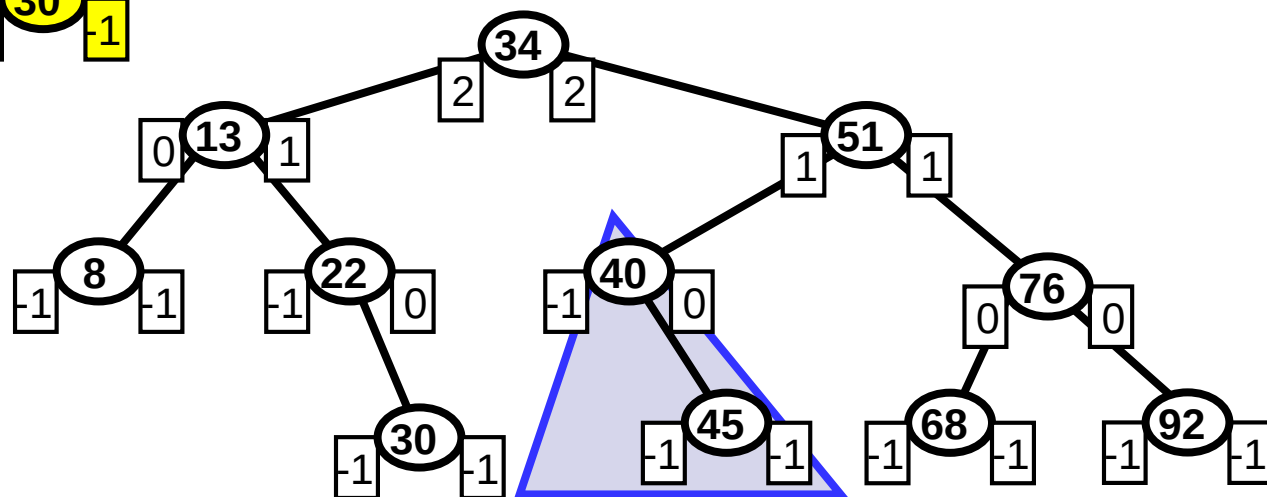
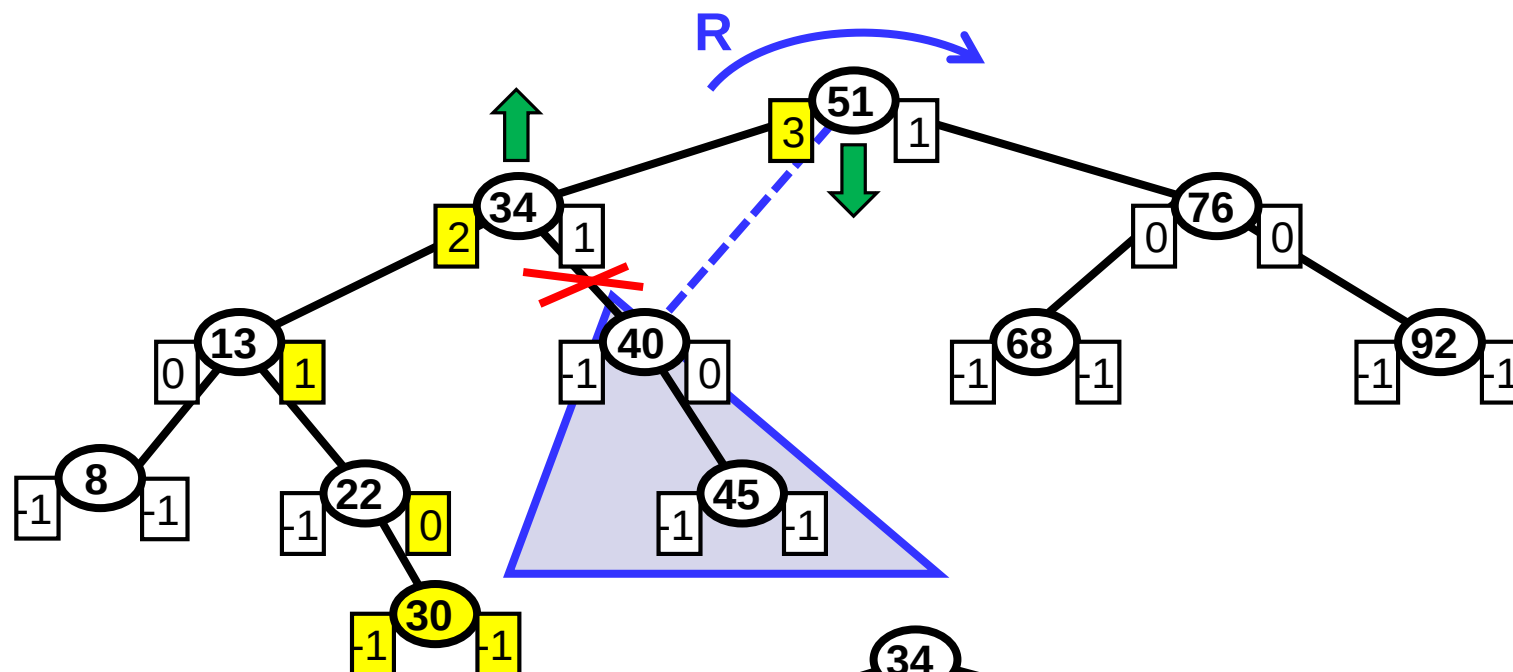
Insert 30



Změněné hloubky

Levý podstrom uzlu 51 je příliš hluboký, strom přestal být AVL stromem.

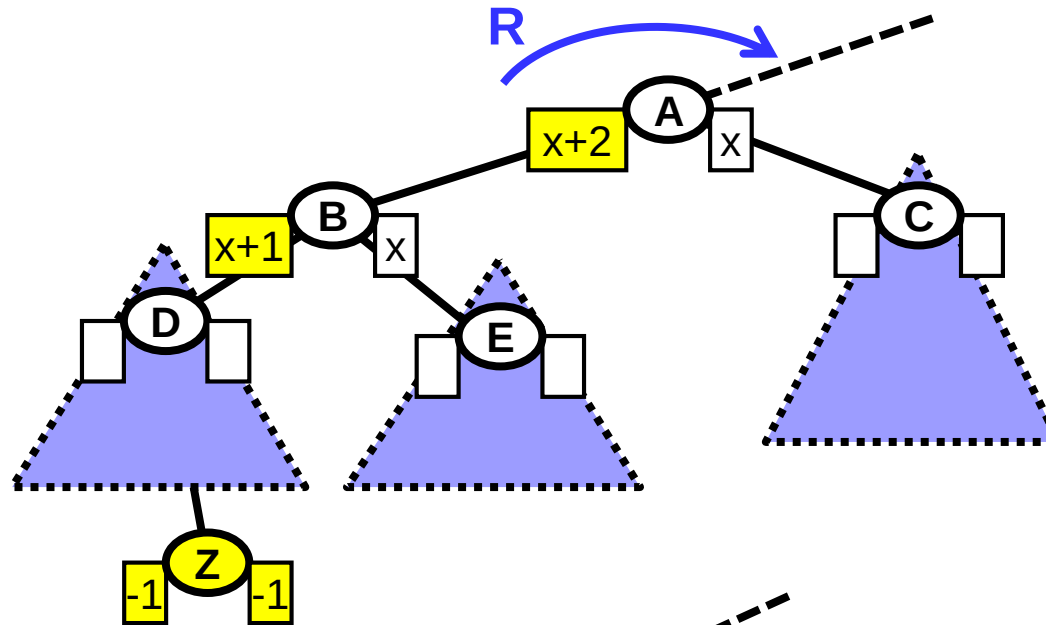
Náprava rozvážení pomocí rotace



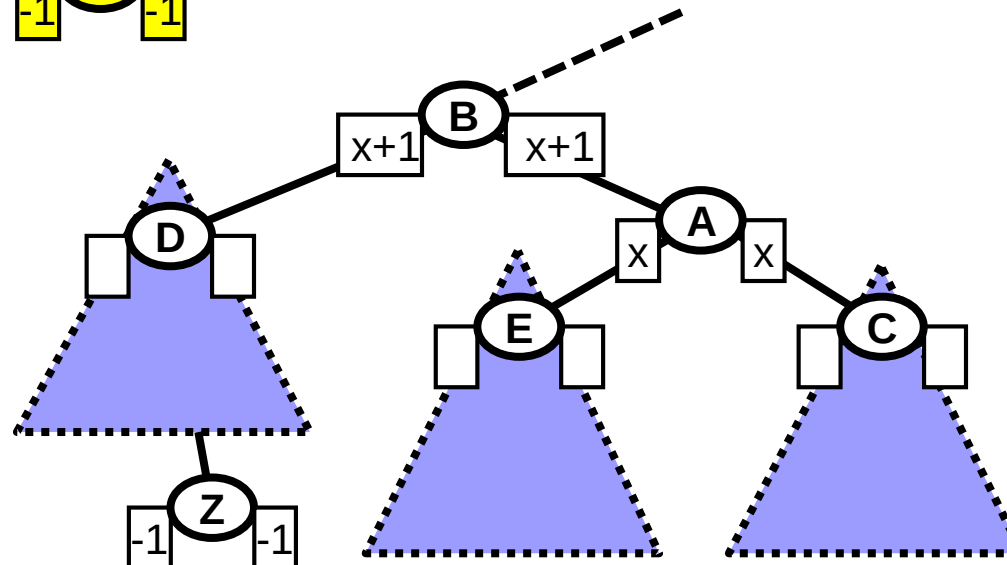
Vyvážený strom
po pravé
jednoduché rotaci
v uzlu 51,
tzv. R rotaci.

Rotace R obecně

Před

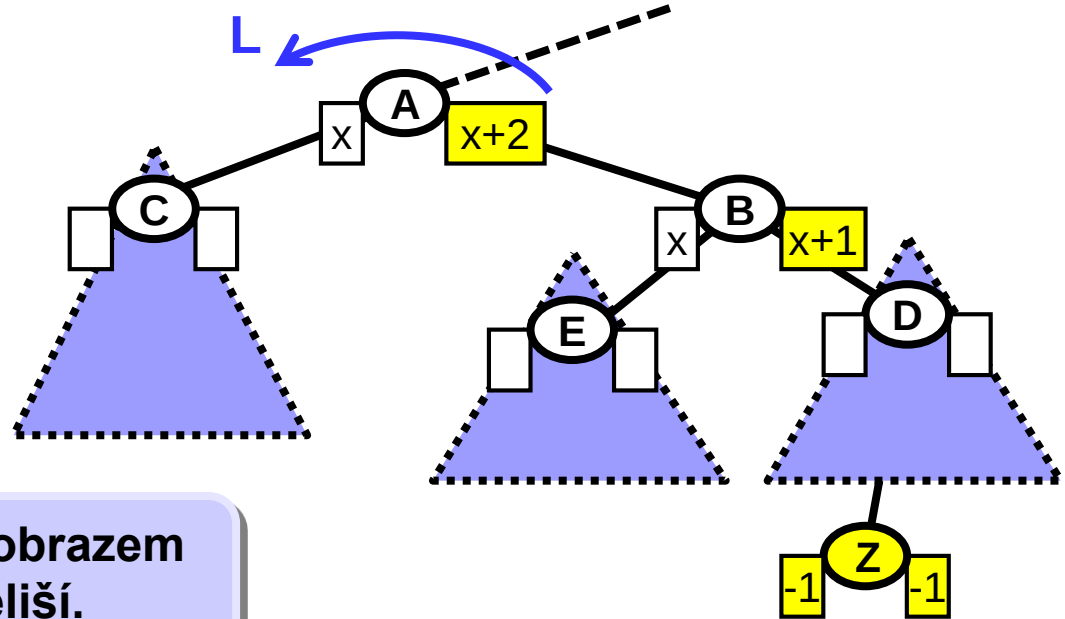


Po



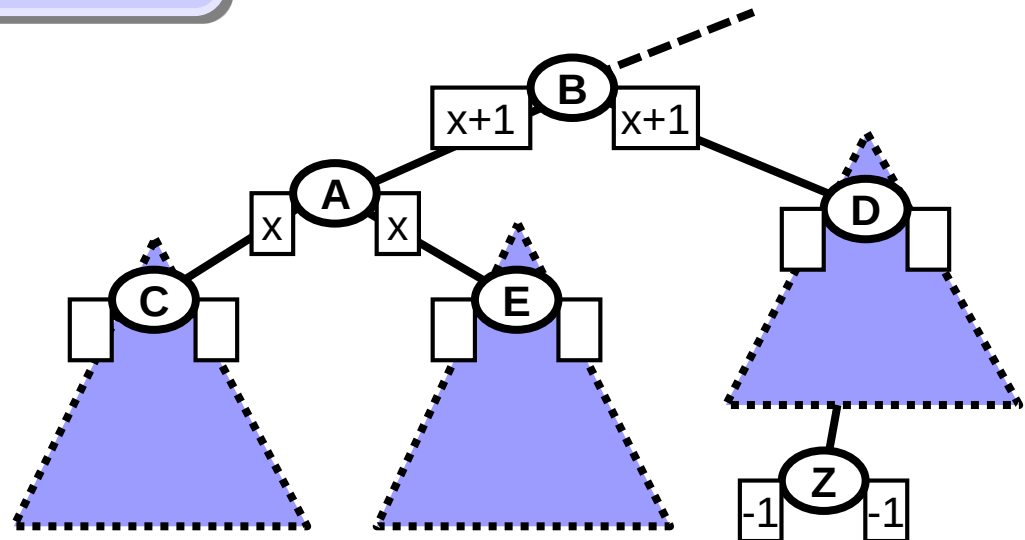
Rotace L obecně

Před



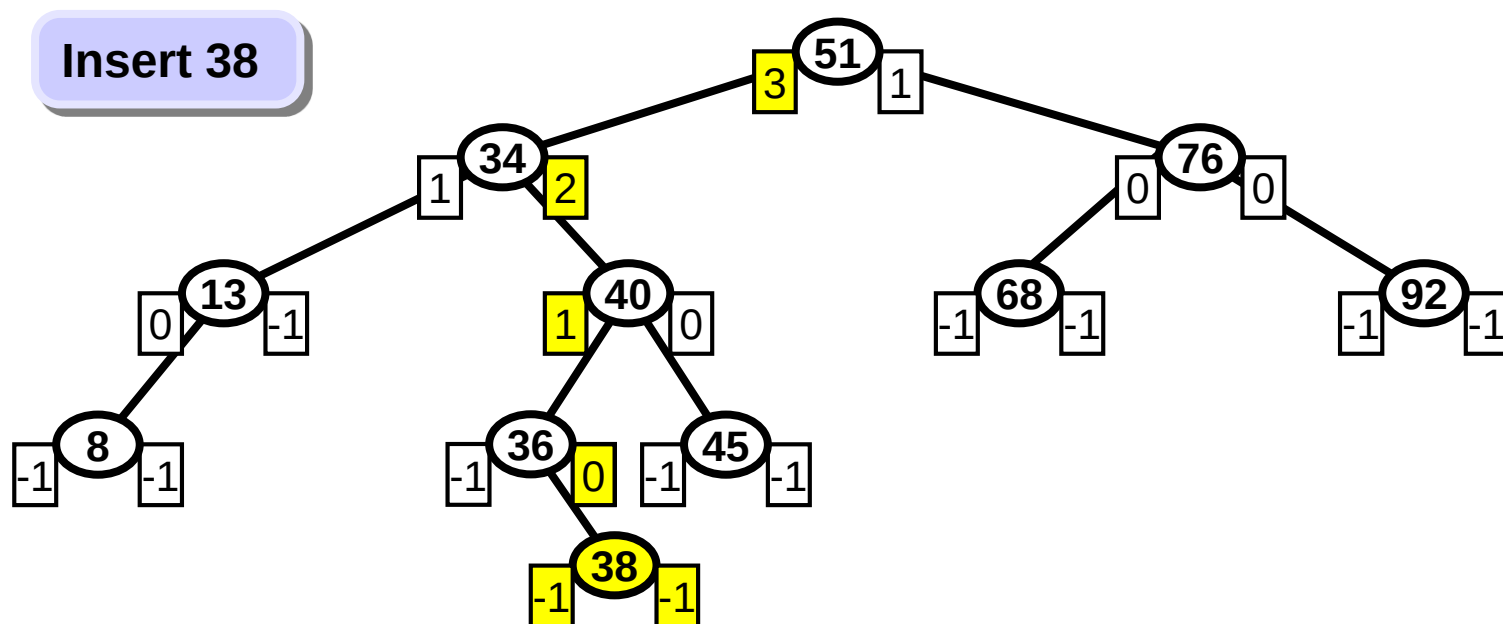
Rotace L je symetrickým obrazem rotace R, jinak se od ní neliší.

Po



Otázka

Jak můžeme vyvážit zobrazený strom pomocí jedné rotace?



- A. R rotací v kořeni.
- B. L rotací v uzlu s klíčem 34.
- C. Nelze vyvážit pomocí jedné L nebo R rotace aplikované na libovolný uzel.



**Jak můžeme vyvážit
zobrazený strom
pomocí jedné rotace?**

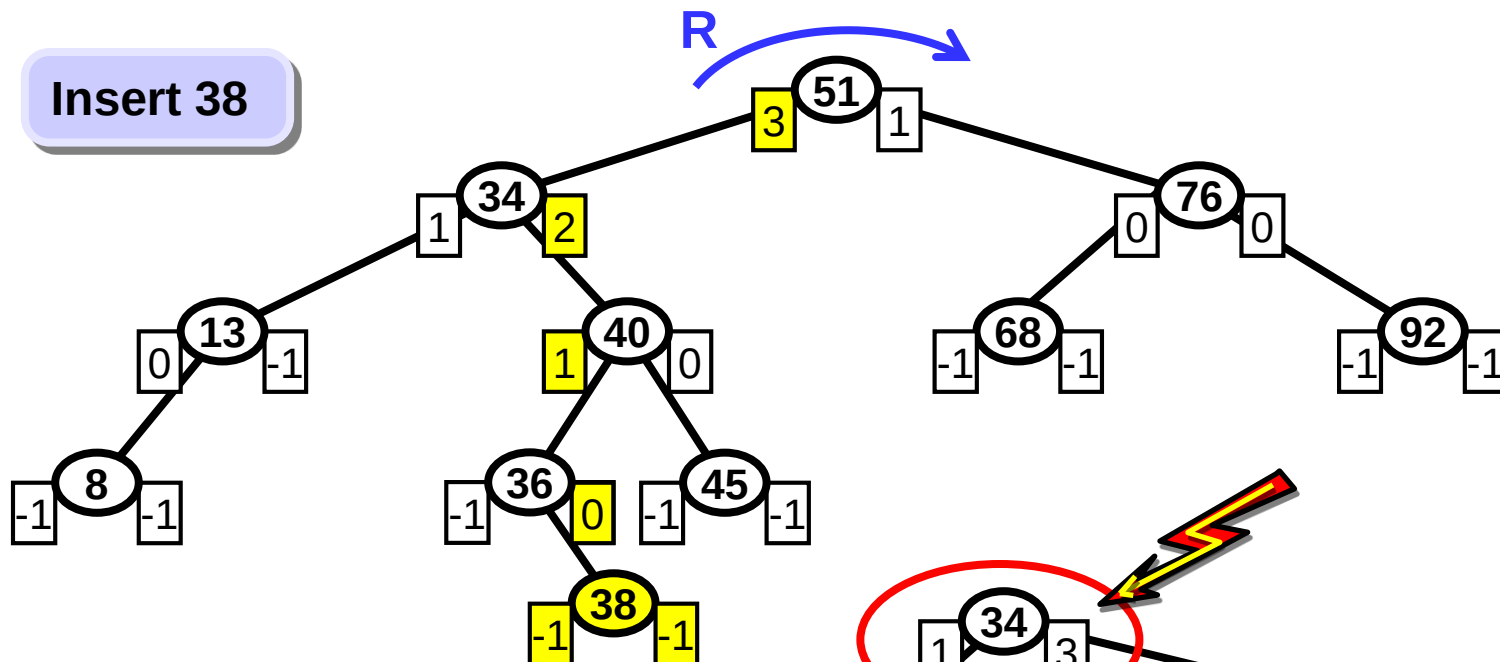


Audience Q&A Session

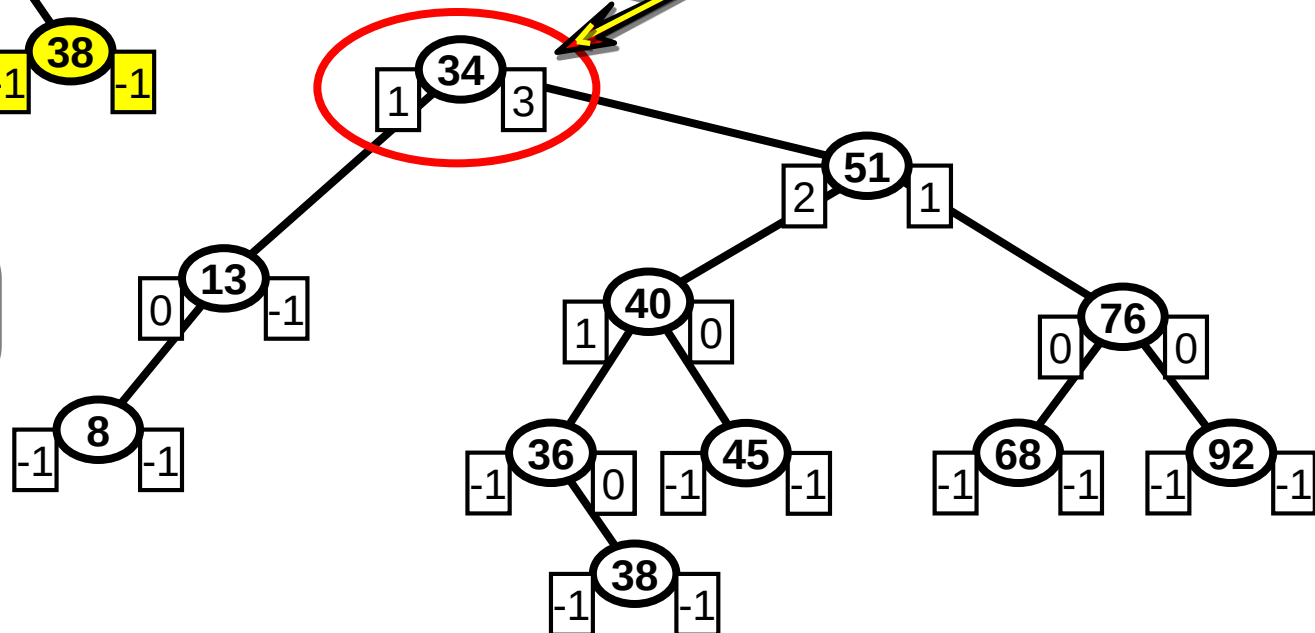
① Start presenting to display the audience questions on this slide.

R nebo L rotace nemusí stačit

Insert 38

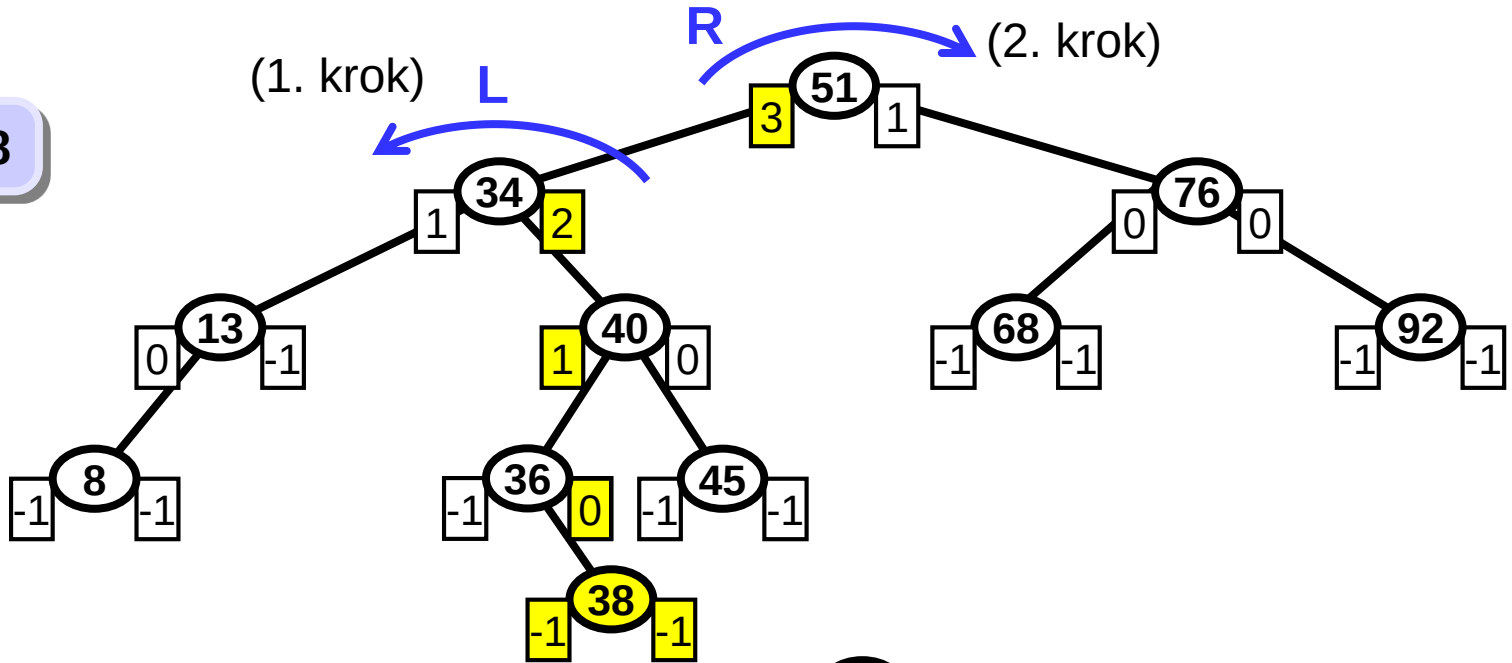


Výsledek po
R rotaci

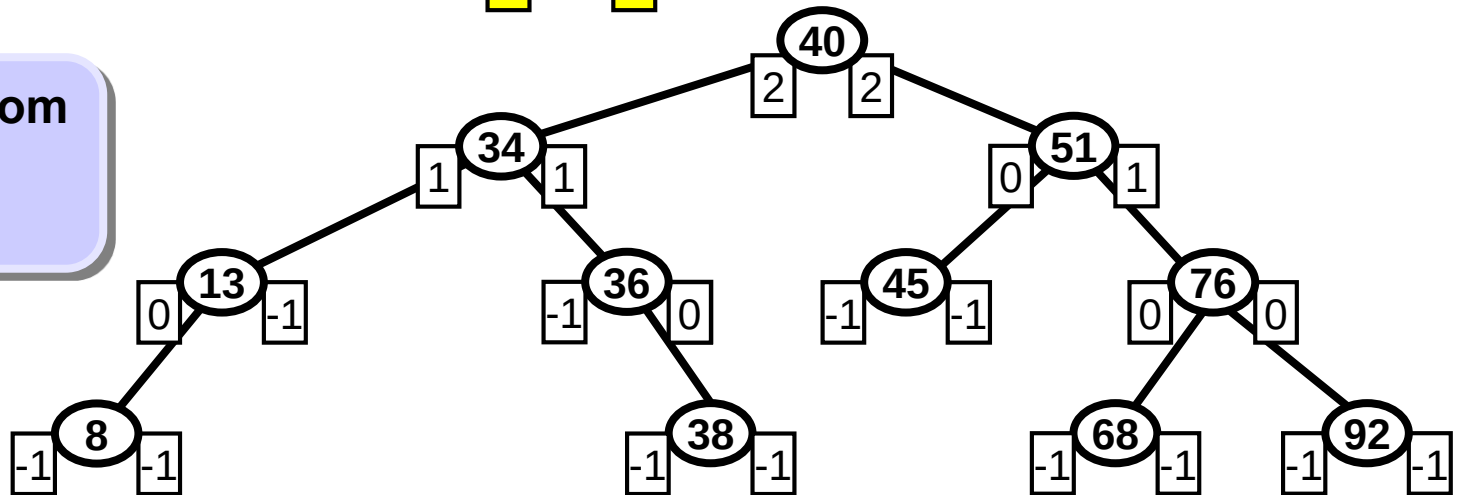


Dvojitá LR rotace

Insert 38

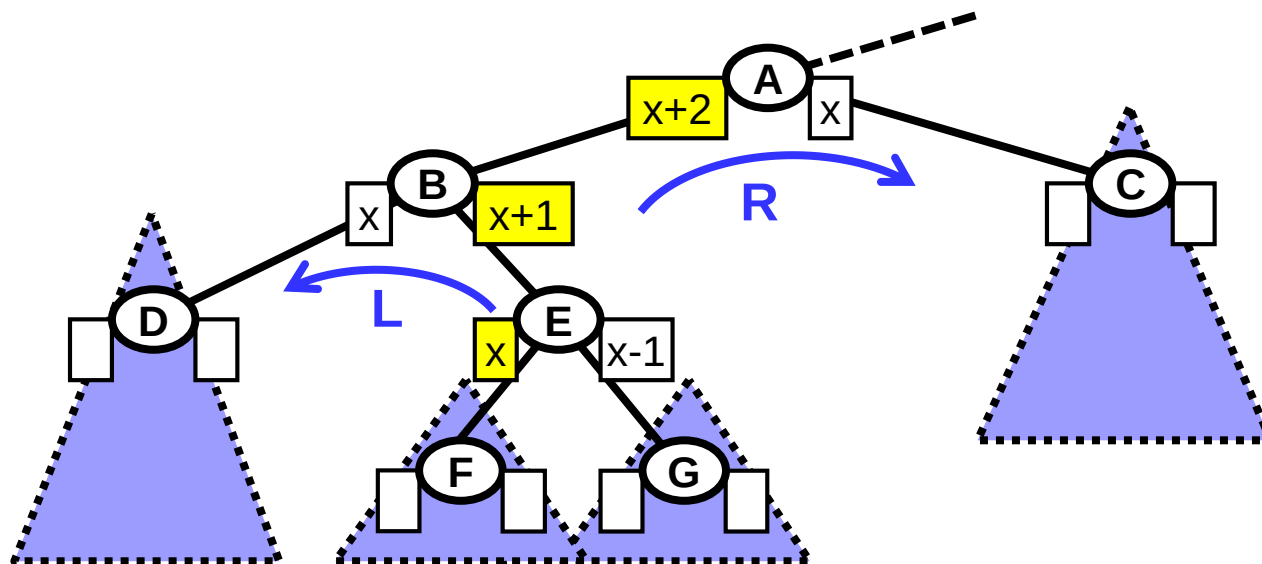


Vyvážený strom
po dvojitě
LR rotaci

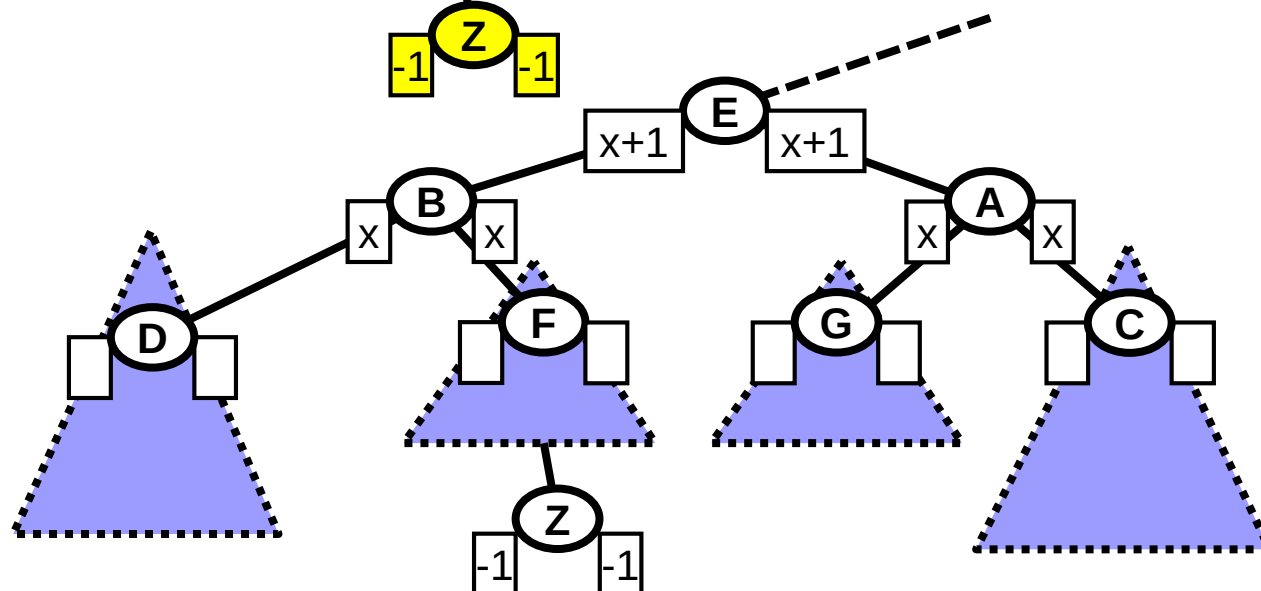


Rotace LR obecně

Před

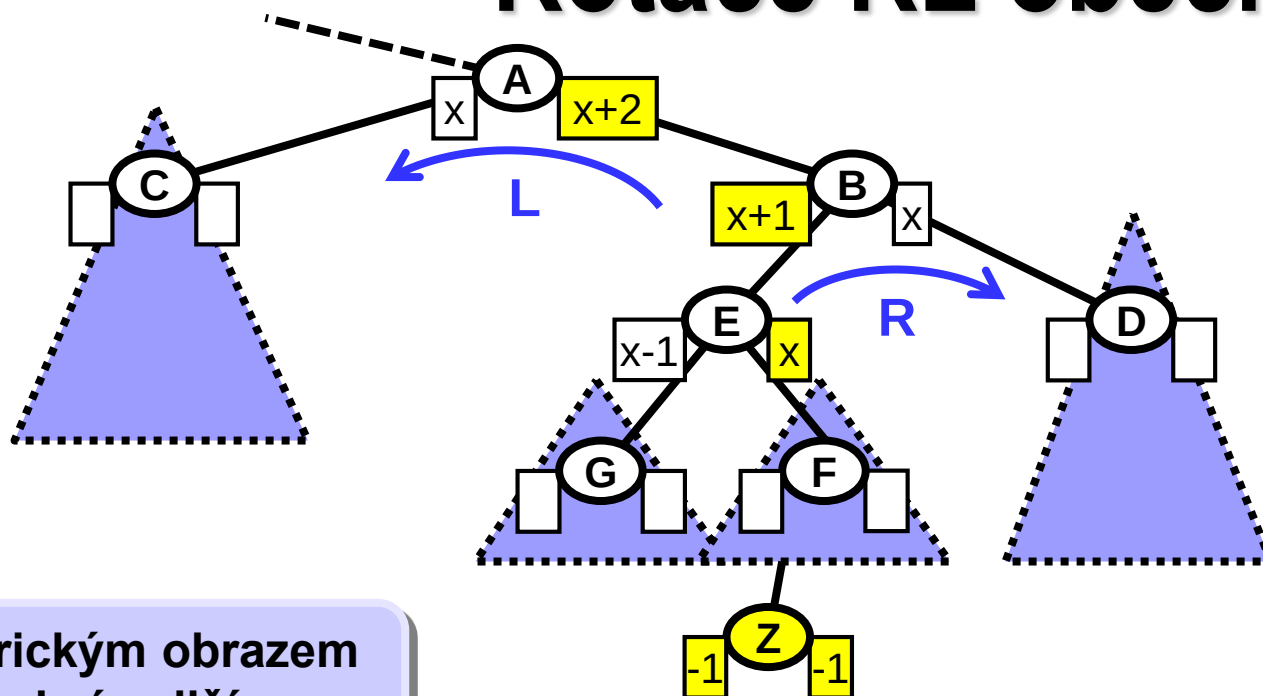


Po



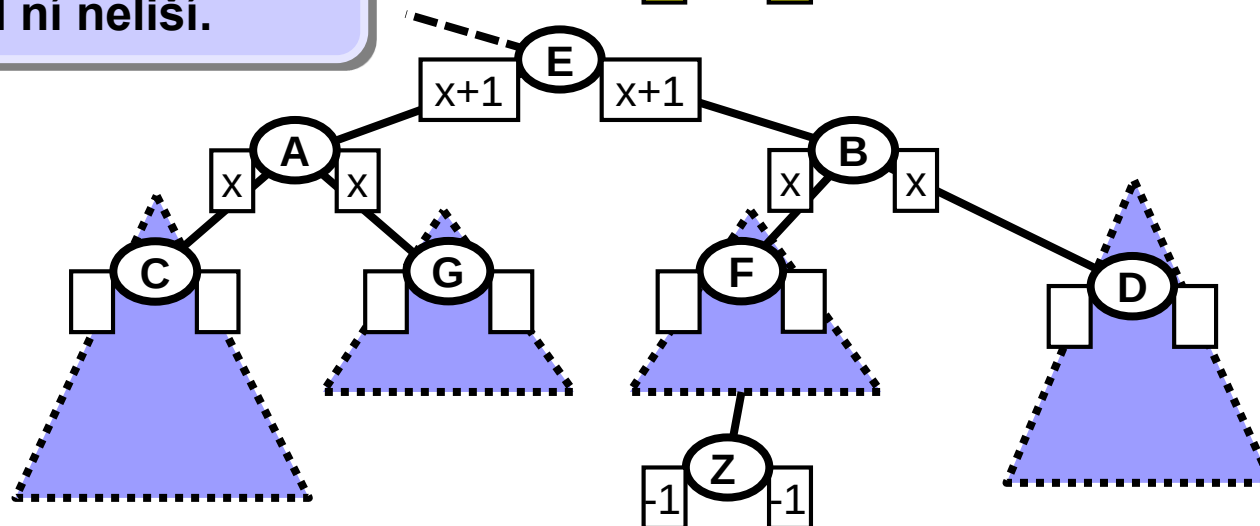
Rotace RL obecně

Před



Rotace RL je symetrickým obrazem rotace LR, jinak se od ní neliší.

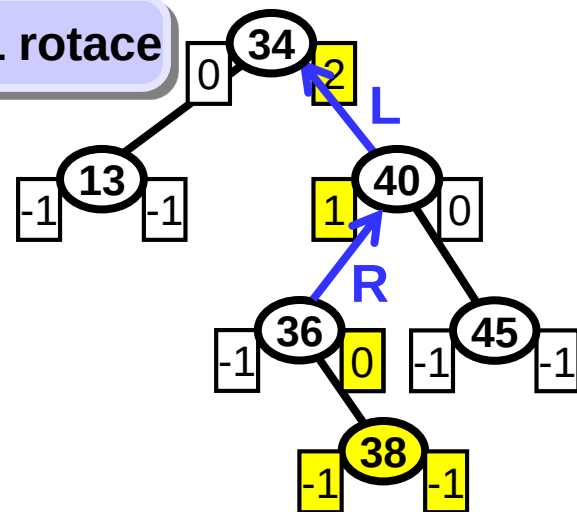
Po



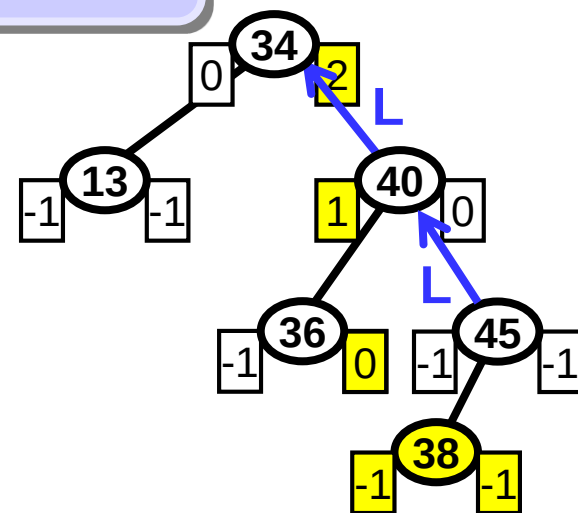
Pravidla pro určení rotace

- Od přidaného uzlu postupujeme směrem ke kořeni a aktualizujeme hloubky podstromů v každém navštíveném uzlu.
- Když narazíme na rozvážený uzel, do kterého jsme bezprostředně došli:
 - dvěma hranami doprava nahoru, provedeme v tomto uzlu **R** rotaci.
 - dvěma hranami doleva nahoru, provedeme v tomto uzlu **L** rotaci.
 - hranami doleva a pak doprava nahoru, provedeme v tomto uzlu **LR** rotaci.
 - hranami doprava a pak doleva nahoru, provedeme v tomto uzlu **RL** rotaci.
- Po provedení jedné rotace po operaci Insert je AVL strom opět vyvážený.

RL rotace



L rotace





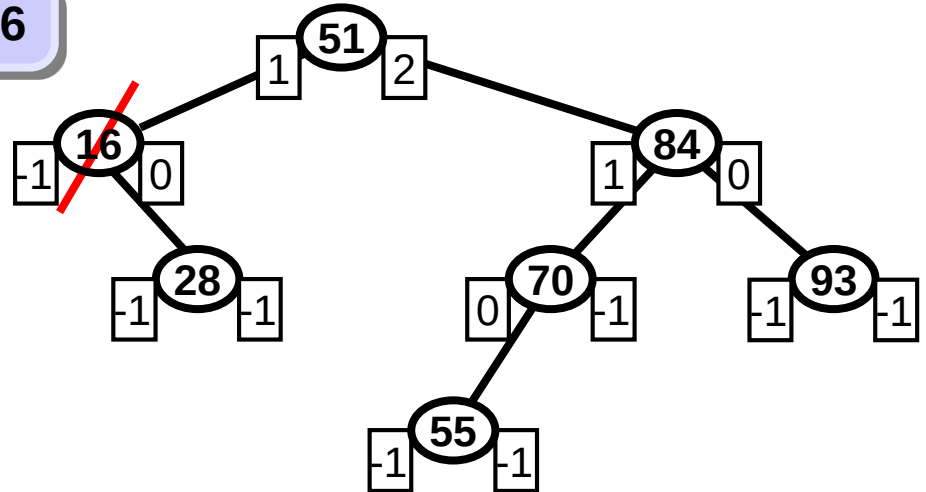
Audience Q&A Session

① Start presenting to display the audience questions on this slide.

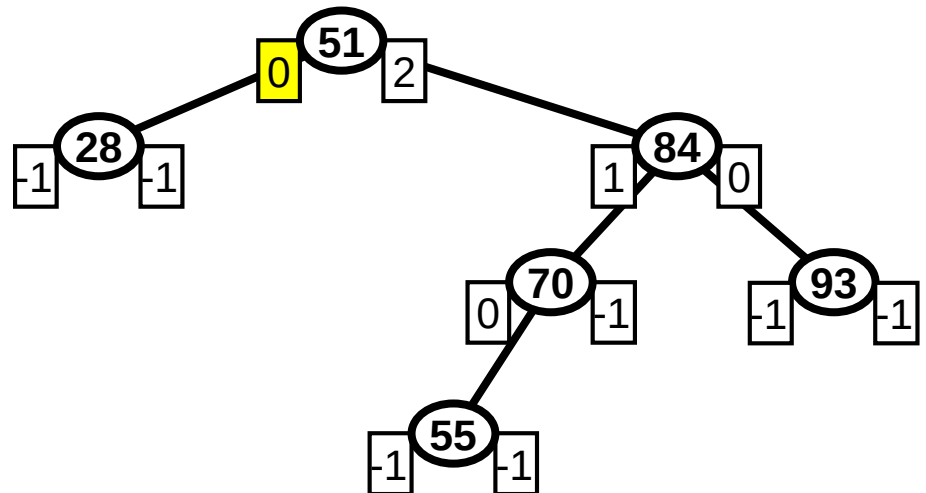
Operace Delete v AVL

Delete 16

- Delete proběhne standardně jako v obyčejném BVS.

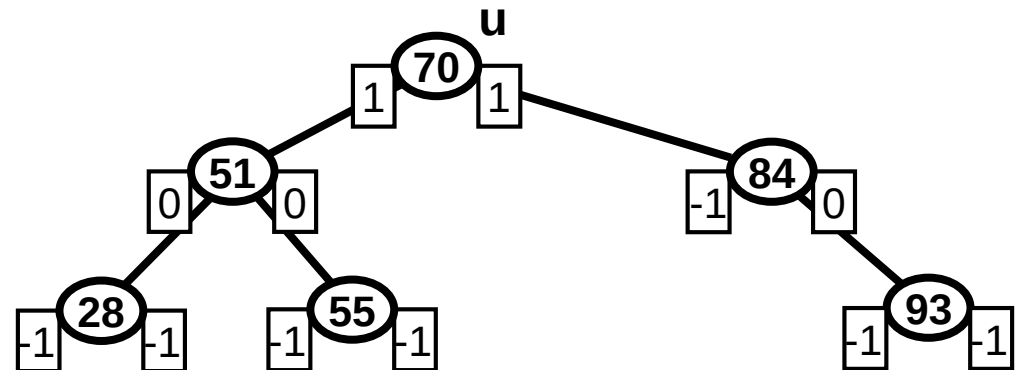
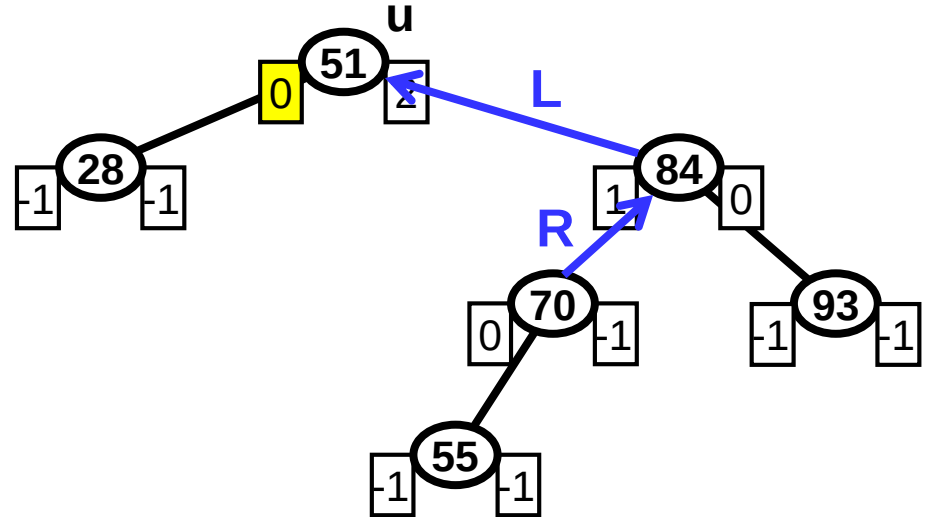


- Poté postupujeme od místa smazání nahoru ke kořeni a aktualizujeme výšky podstromů v každém uzlu.
- Při rozvážení aplikujeme rotaci podobně jako při vkládání.



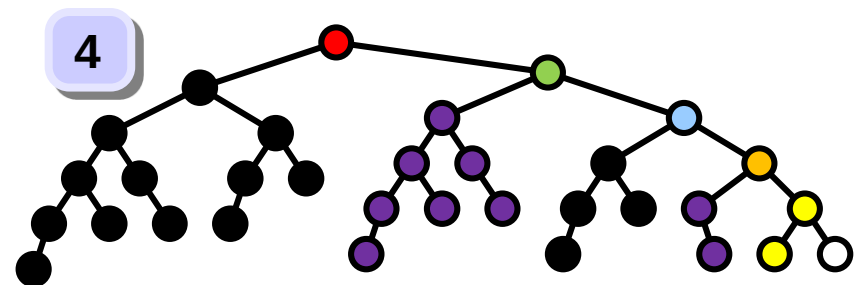
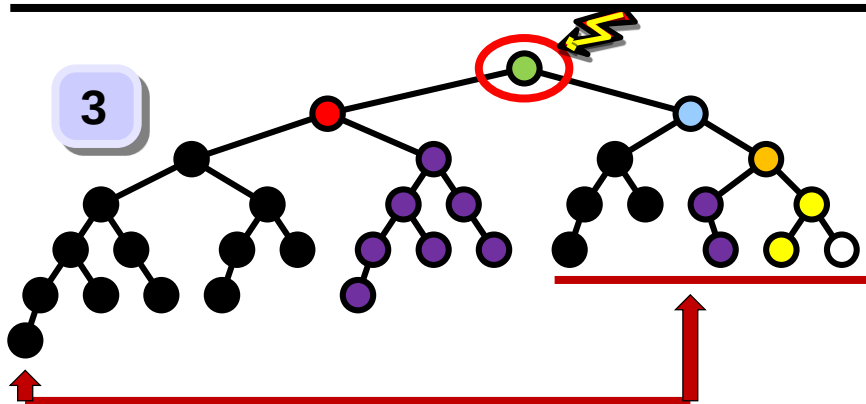
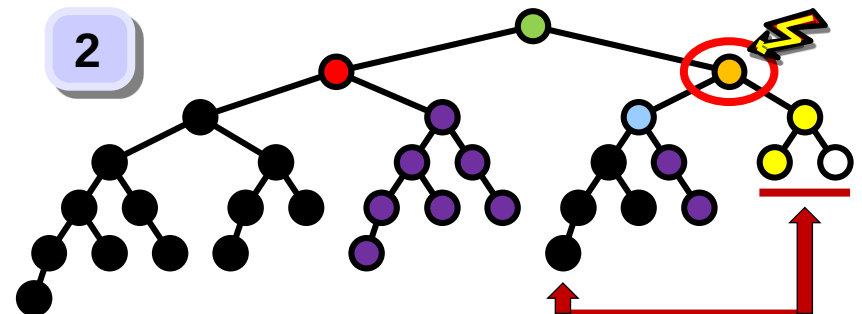
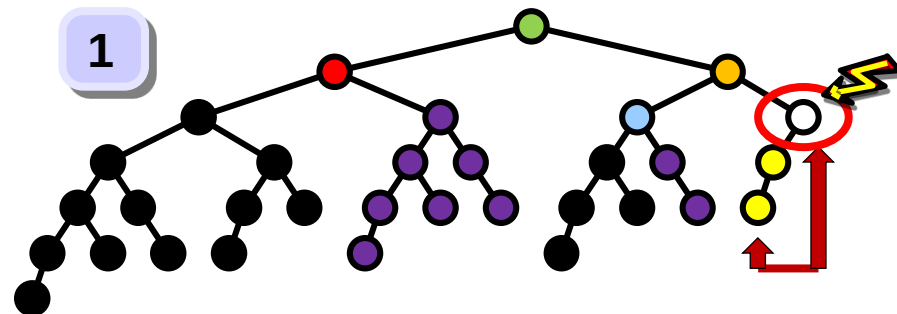
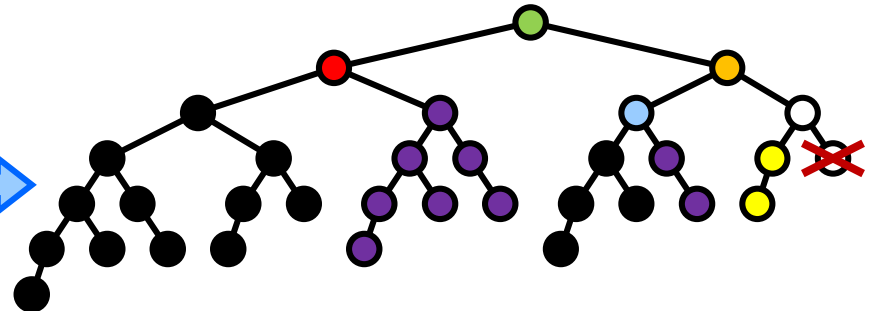
Operace Delete v AVL

- V rozváženém uzlu **u** se podíváme na první dvě hrany cesty z **u** do nejhlubšího uzlu (při více takovýchto uzlech máme na výběr).
- Směr těchto dvou hran určí typ rotace podobně jako u operace Insert.



Opakové rotace po operaci Delete

Příklad: Delete v AVL
stromu s $n = 33$ uzly.

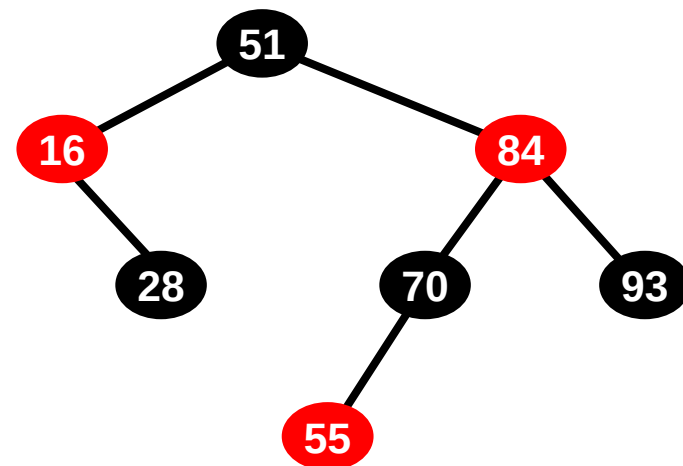


Vyvážení obecně po $O(\log n)$ rotacích.

Operace	BVS s n uzly	AVL s n uzly
Find	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$
Insert	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$
Delete	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$

Vizualizace: <https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html>

- Existuje i jiný druh samovyvažovacího BVS, tzv. červeno-černý strom (implementace: `java.util.TreeSet`).
- AVL je výhodnější, pokud operace Find jsou čtenější než operace Insert a Delete.





Audience Q&A Session

① Start presenting to display the audience questions on this slide.

B-strom

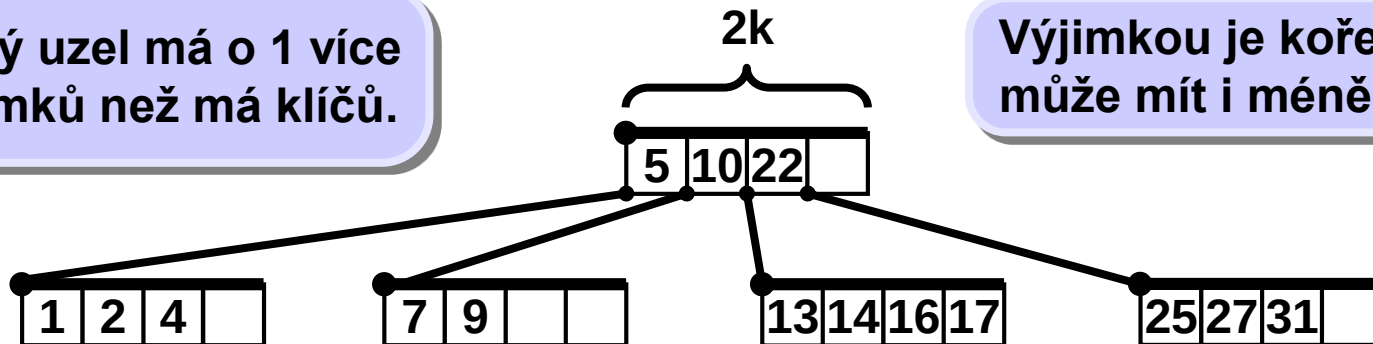
- Autoři: Bayer & McCreight (1970)
- Původ názvu: **b**alanced, **B**ayer, **B**oeing
- Využití: databázové systémy, souborové systémy

B-strom řádu k

Každý uzel obsahuje minimálně k a maximálně $2k$ vzestupně uspořádaných klíčů.

Každý uzel má o 1 více potomků než má klíčů.

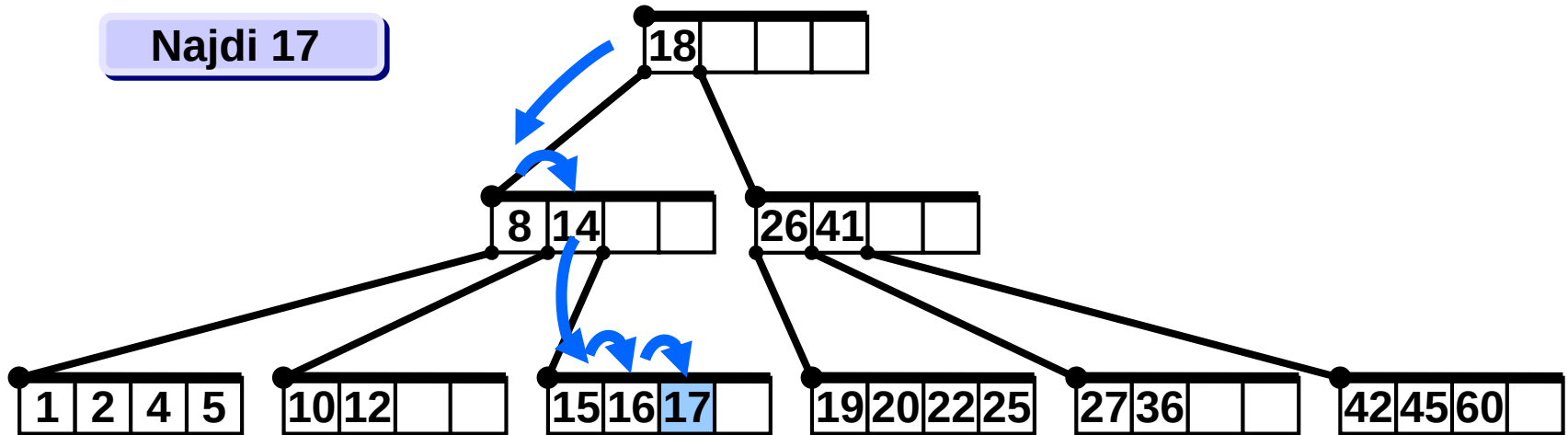
Výjimkou je kořen, který může mít i méně klíčů.



Všechny cesty z kořene do listu jsou stejně dlouhé.

Find v B-stromu

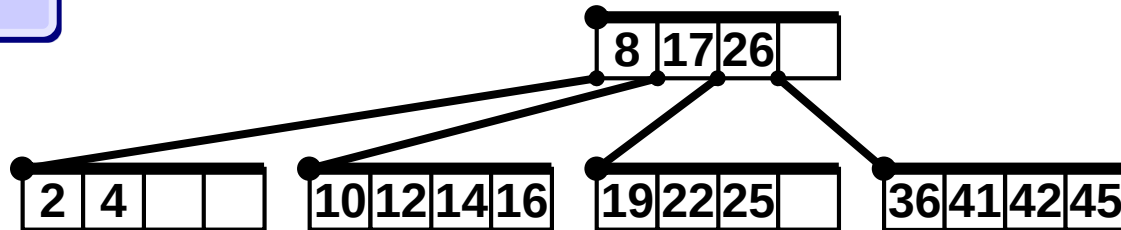
Najdi 17



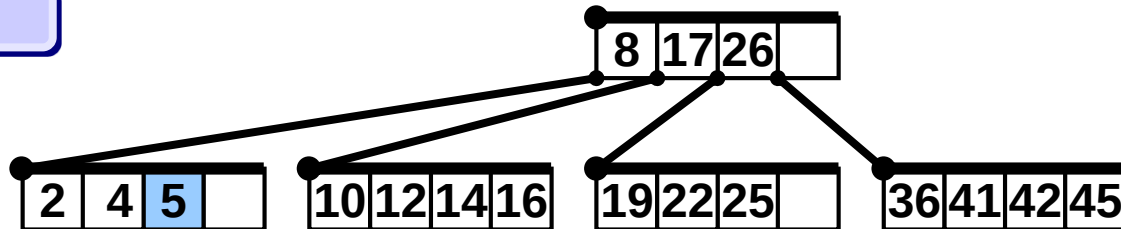
V uzlu se vyhledává sekvenčně
nebo půlením intervalu.

Insert v B-stromu

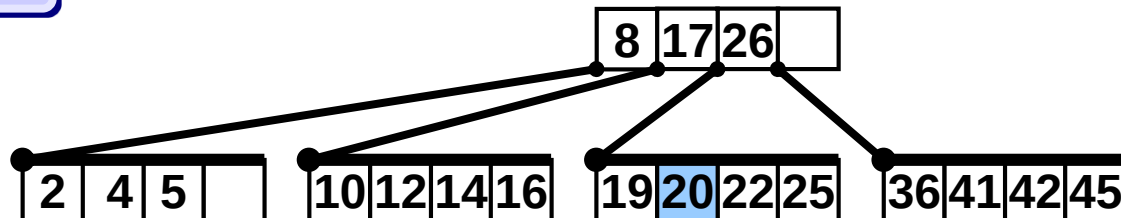
B-strom



Vlož 5

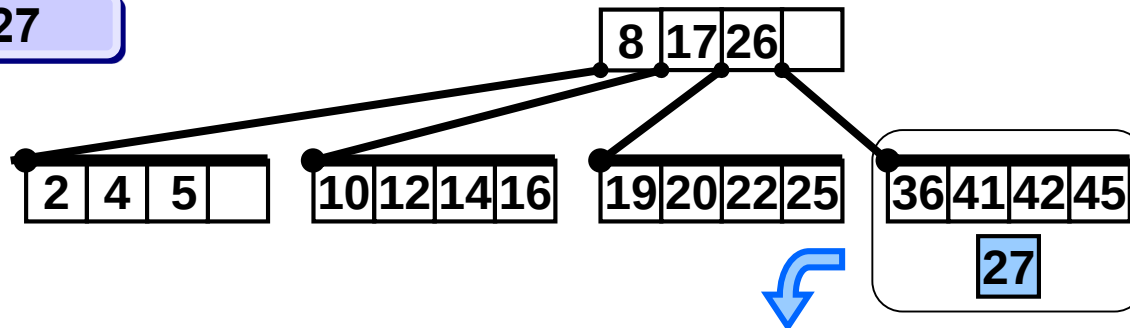


Vlož 20

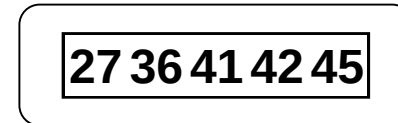


Insert v B-stromu

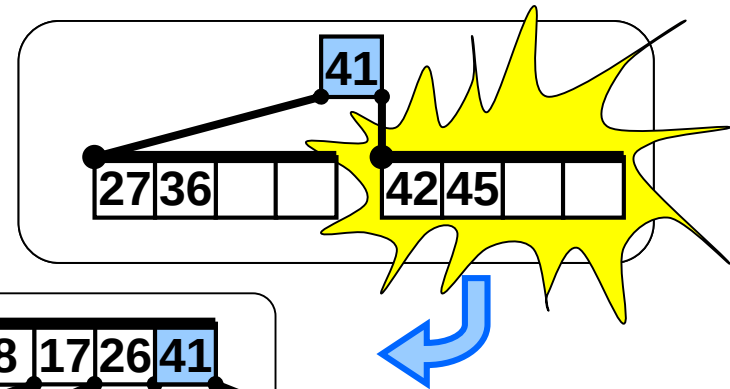
Vlož 27



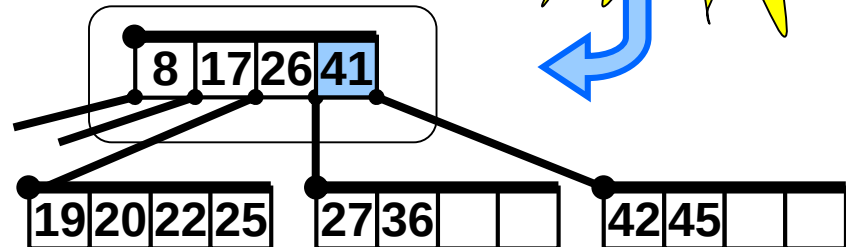
Seřad' mimo strom.



Vyber medián,
vyvoř nový uzel,
přesuň do něj hodnoty
větší než medián.



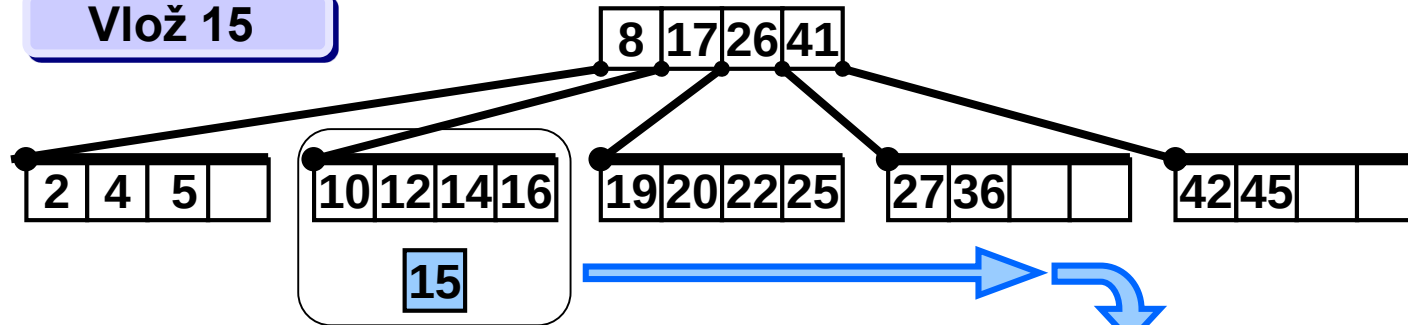
Medián zkus vložit
do rodiče.



Zdařilo se.

Insert v B-stromu

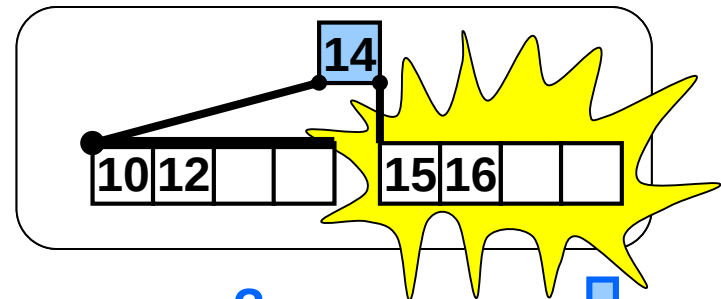
Vlož 15



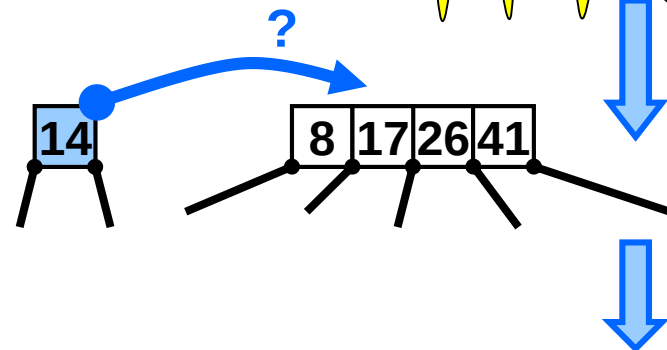
Seřad' mimo strom.

10 12 14 15 16

Vyber medián,
vyvoř nový uzel,
přesuň do něj hodnoty
větší než medián.



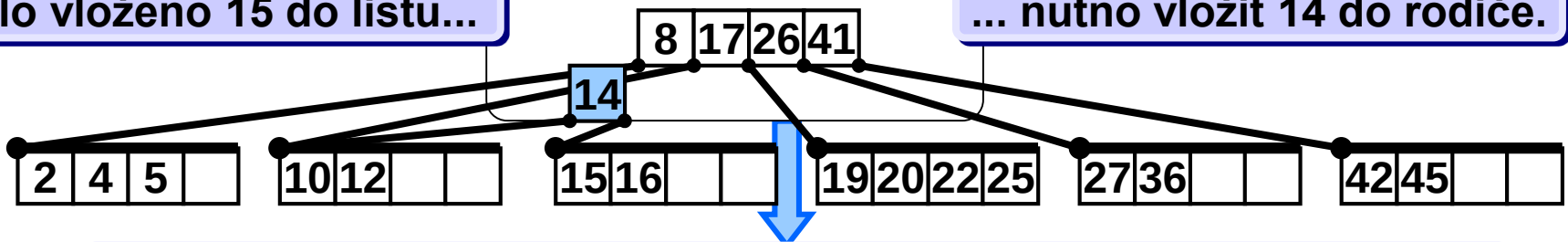
Medián zkus vložit
do rodiče.



Insert v B-stromu

Bylo vloženo 15 do listu...

... nutno vložit 14 do rodiče.



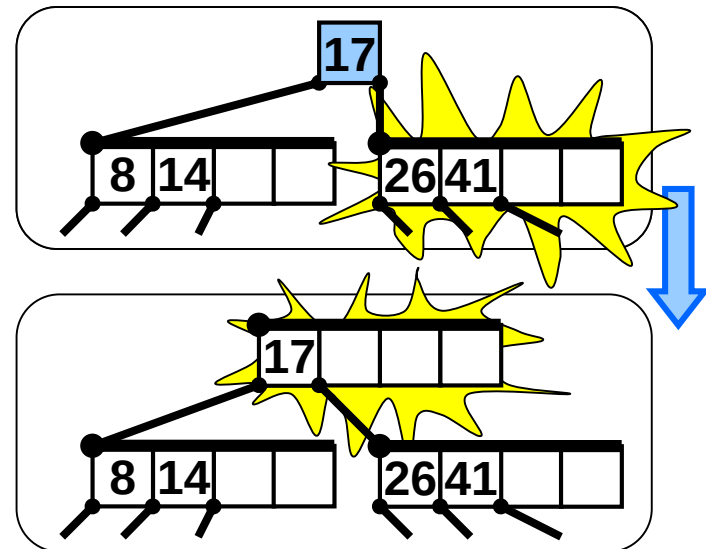
Rodič je zaplněn – Analogický další postup směrem ke kořeni.

Seřad' mimo strom.

8 14 17 26 41

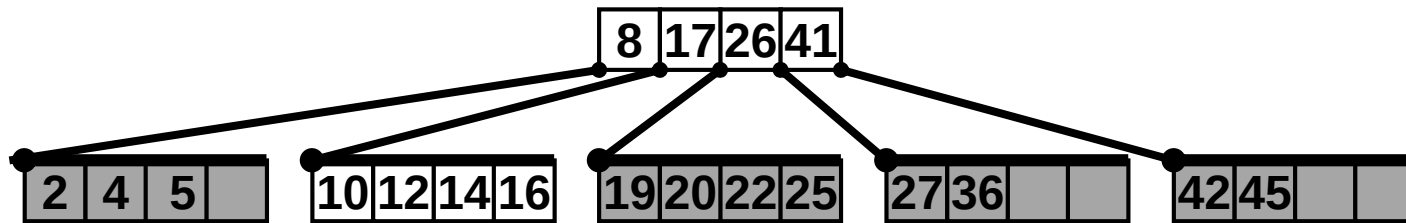
Vyber medián,
vyvoř nový uzel,
přesuň do něj hodnoty
větší než medián.

Medián nelze vložit do
rodiče, žádný rodič není,
tedy se zřídí nový kořen.

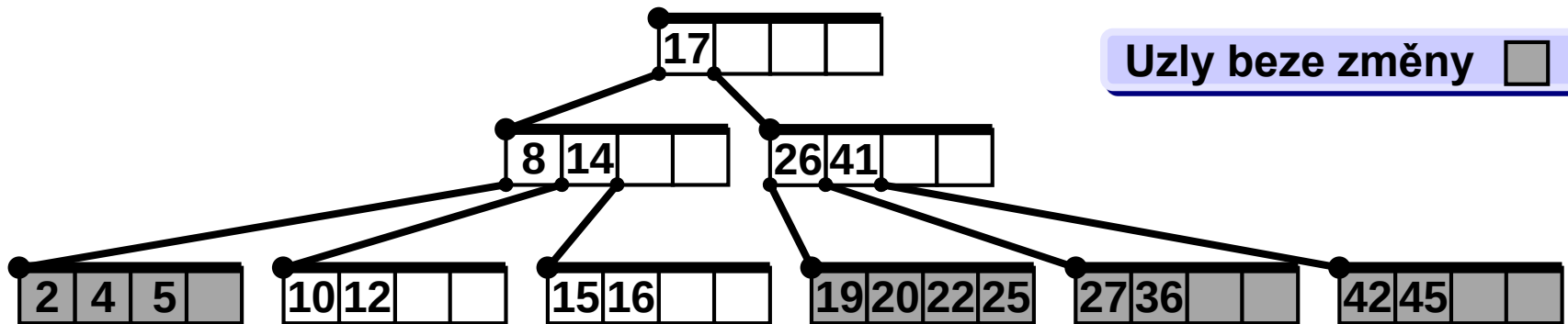


Insert v B-stromu

Rekapitulace - vlož 15



Vlož 15



V každém patře přibyl jeden uzel, kromě toho přibyl nový kořen, strom ale roste směrem "vzhůru", zůstává ideálně vyvážený.



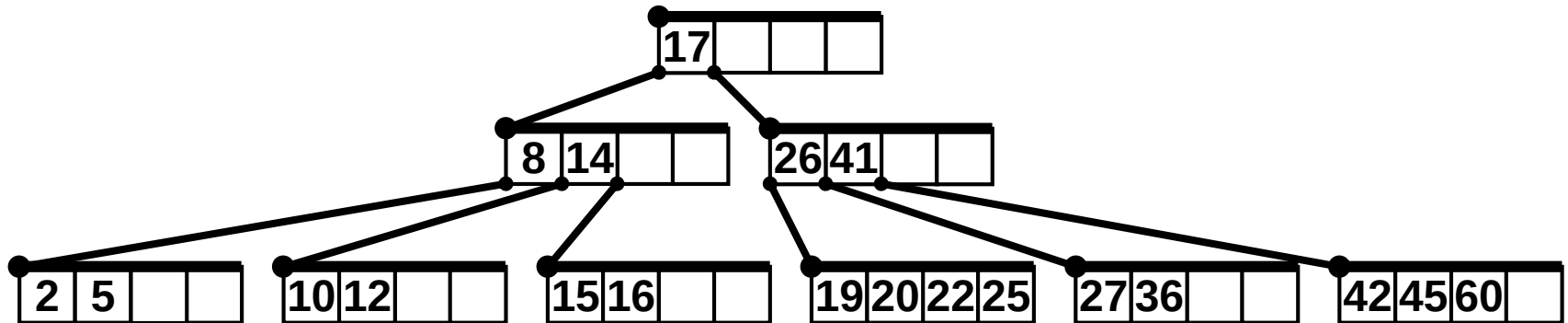
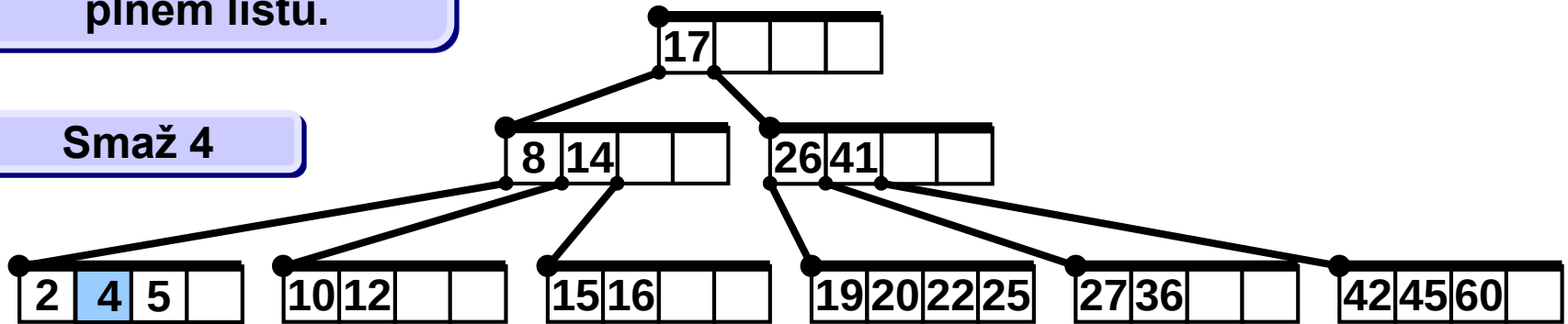
Audience Q&A Session

① Start presenting to display the audience questions on this slide.

Delete v B-stromu

Mazání v dostatečně
plném listu.

Smaž 4

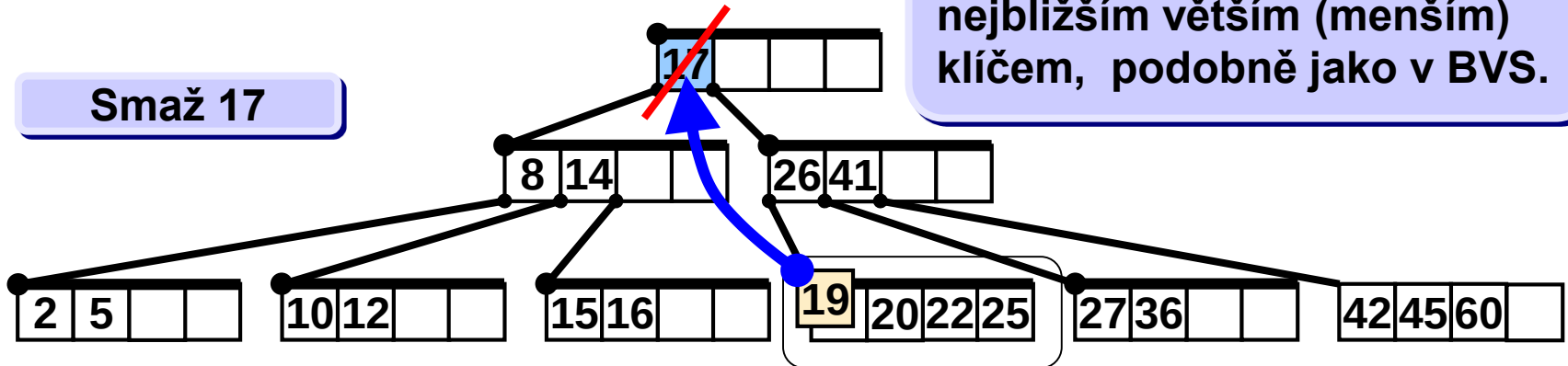


Delete v B-stromu

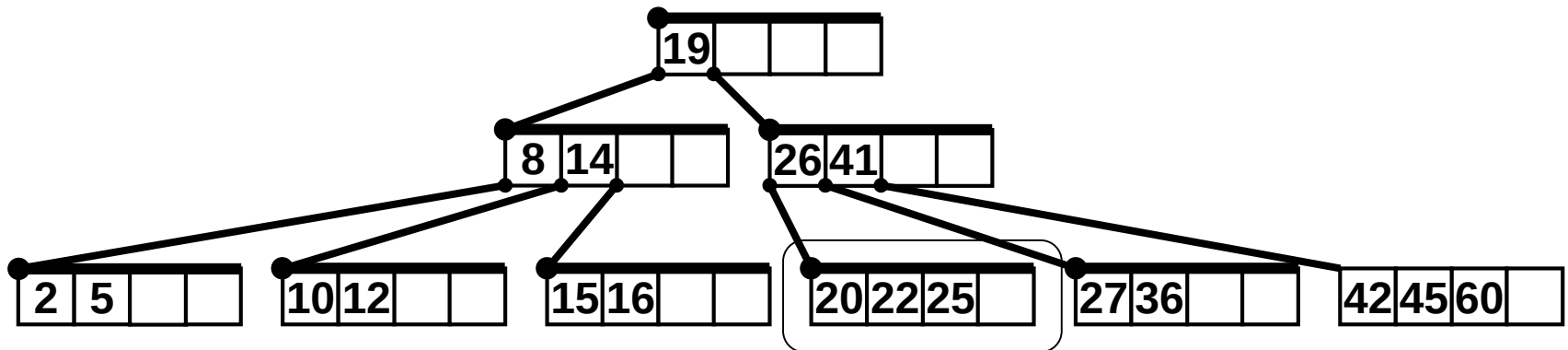
Mazání ve vnitřním uzlu

Smaž 17

Smazaný klíč se nahradí
nejbližším větším (menším)
klíčem, podobně jako v BVS.



Nejbližší větší (menší) klíč je vždy v B-stromu v listu,
má-li tento list dostatečný počet klíčů, jsme hotovi.

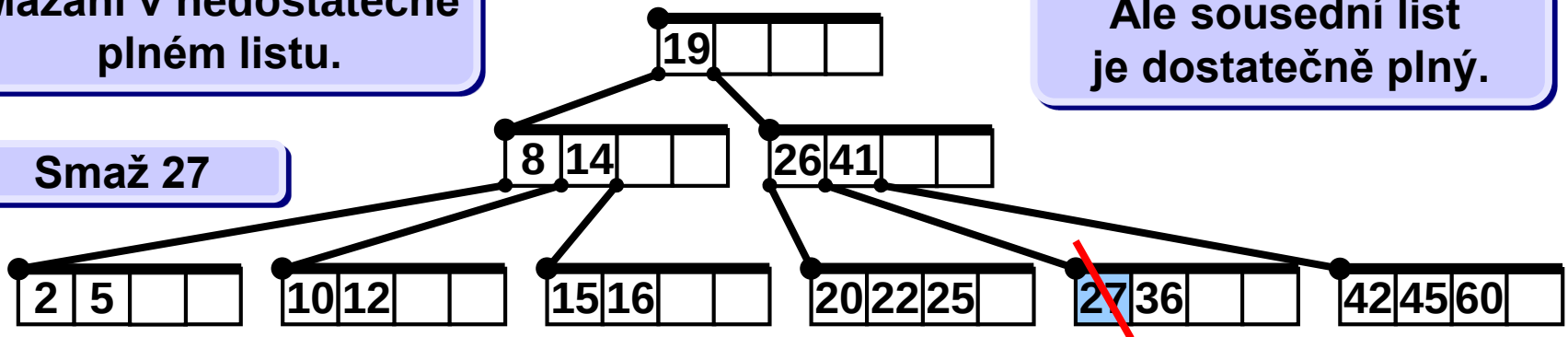


Delete v B-stromu

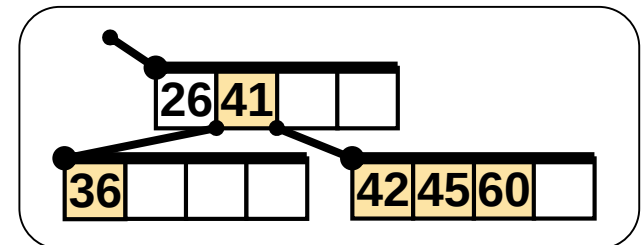
Mazání v nedostatečně plném listu.

Ale sousední list je dostatečně plný.

Smaž 27

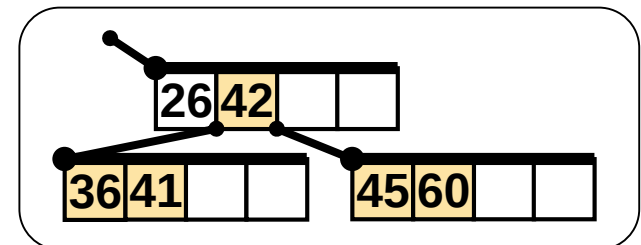


Sjednot' klíče s klíči v sousedním listu a s dělicím klíčem v rodiči a seřaď.



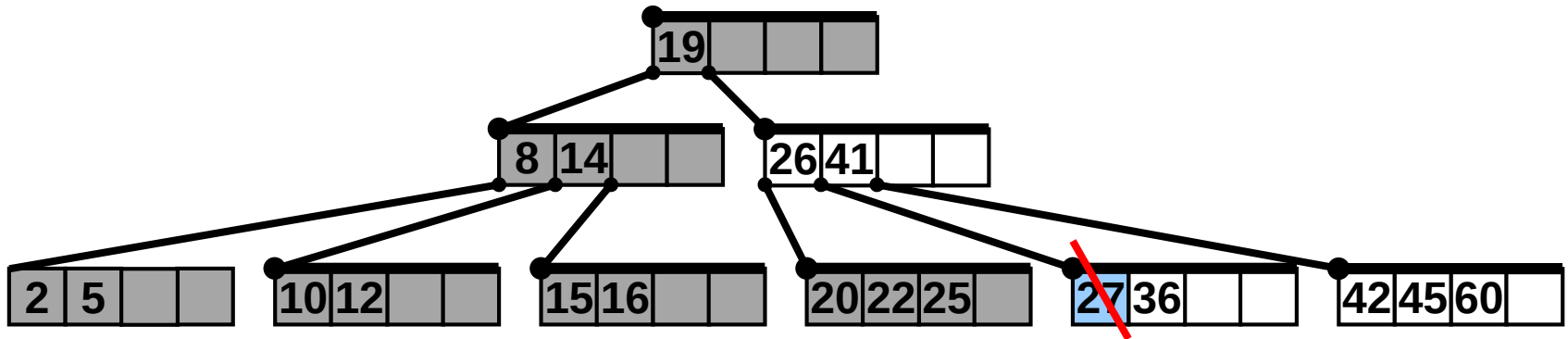
36 41 42 45 60

Medián sjednocení vloží na místo původně dělicího klíče, menší a větší klíče než medián rozděl do levého a pravého listu.

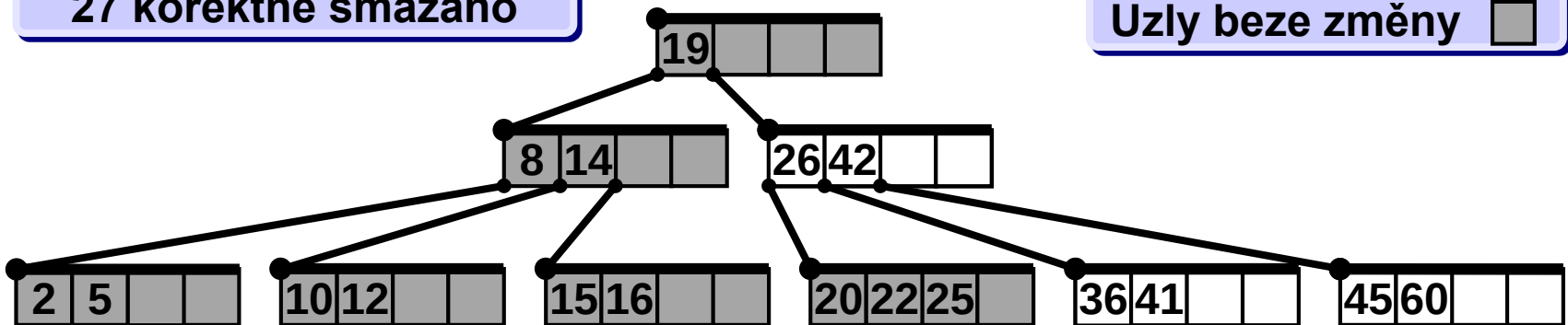


Delete v B-stromu

Rekapitulace - smaž 27



27 korektně smazáno



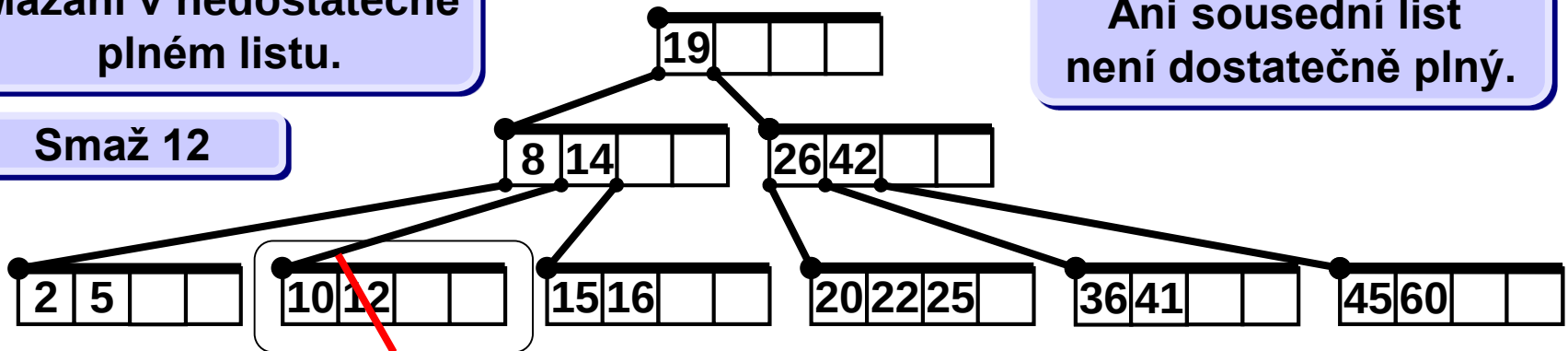
Uzly beze změny ☐

Delete v B-stromu

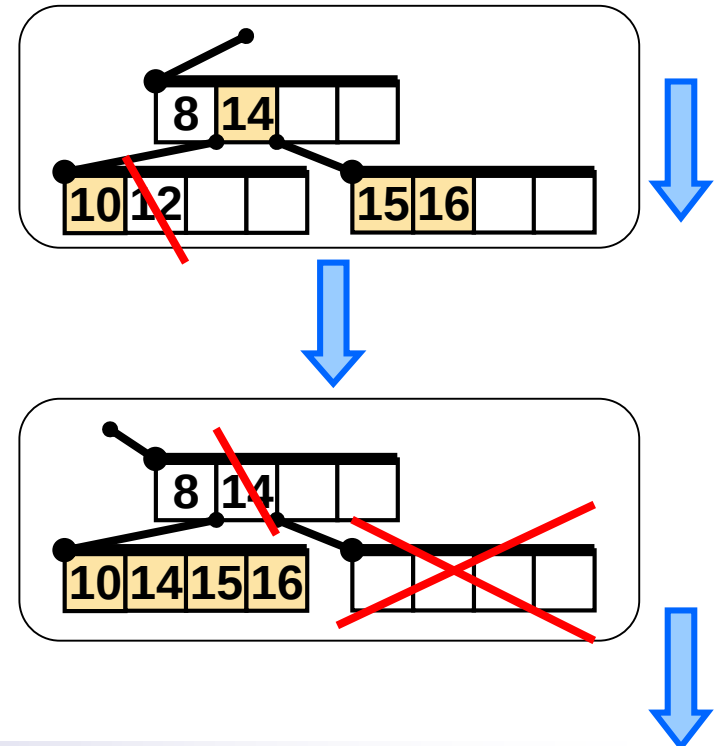
Mazání v nedostatečně plném listu.

Smaž 12

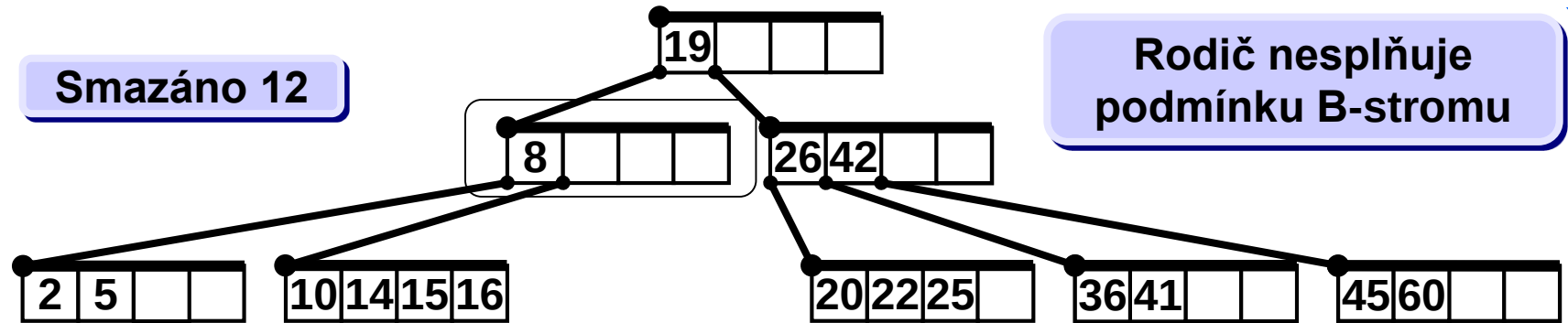
Ani sousední list není dostatečně plný.



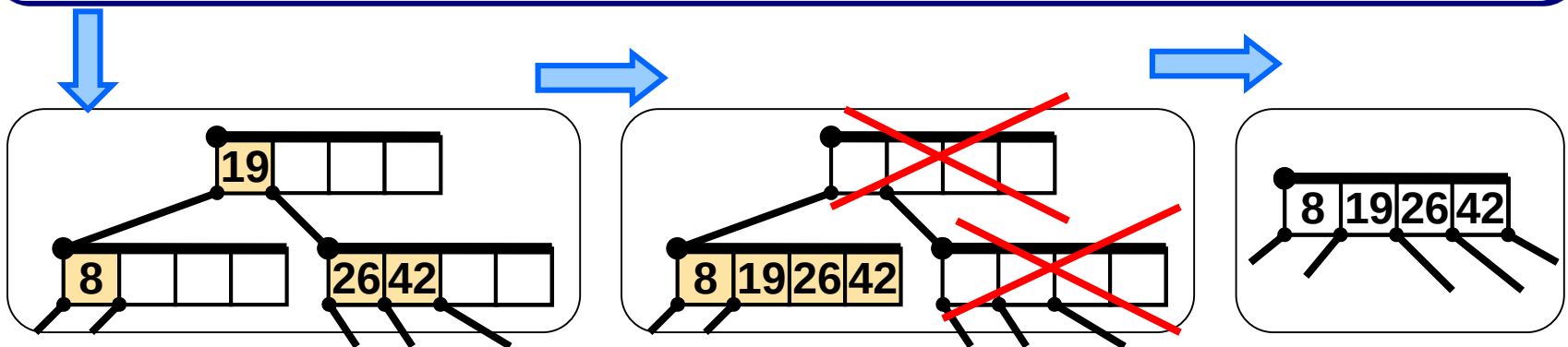
Sjednot' klíče s klíči v sousedním listu a s dělicím klíčem v rodiči a seřaď'. Vše vlož do původního listu, sousední list smaž, dělicí klíč v rodiči také smaž.



Delete v B-stromu

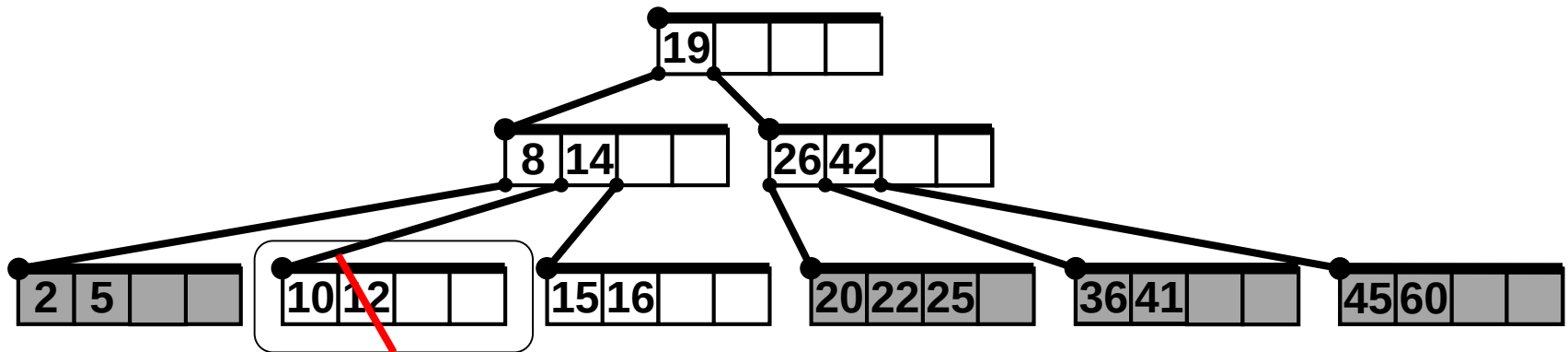


Rodič, který poskytl klíč potomku, není dostatečně plný.
Aplikujeme na něj (a případně iterativně na jeho rodiče) tentýž postup
spojení klíčů a sousedních uzlů a přesun dělicího prvku z rodiče.

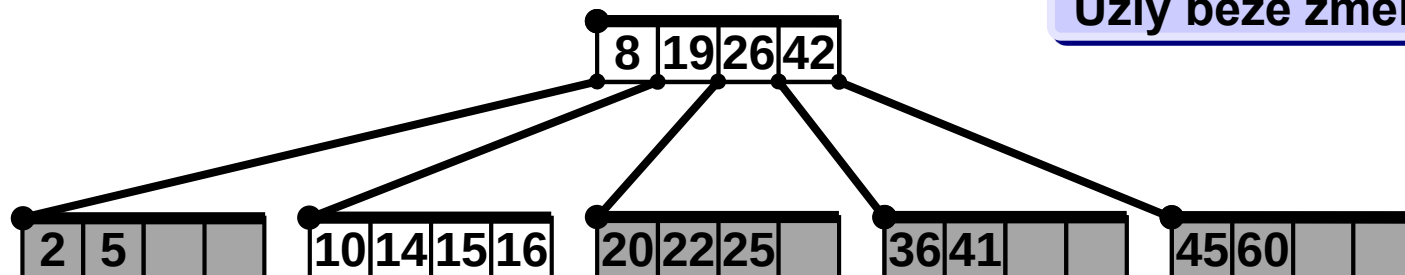


Delete v B-stromu

Rekapitulace - smaž 12



Smazáno 12 a strom byl adekvátně restrukturován.



Uzly beze změny ☐

Operace	B-strom řádu k s n uzly
Find	$\Theta(k \cdot \log_k n)$
Insert	$\Theta(k \cdot \log_k n)$
Delete	$\Theta(k \cdot \log_k n)$

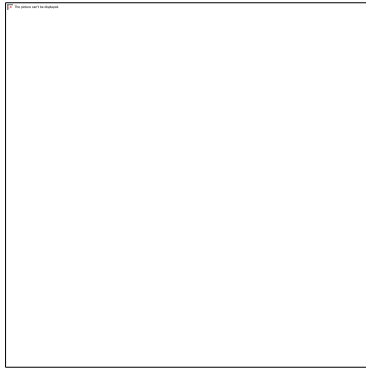


Jakou má Find asymptotickou složitost při použití binárního vyhledávání v uzlech?

Obecnější definice B-stromu:

- Je dána kapacita uzlů $m \geq 2$.
- Každý uzel má minimálně $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ klíčů (kromě kořene) a maximálně m klíčů.

Vizualizace: <https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BTree.html>



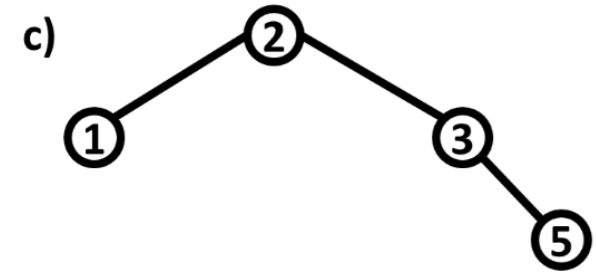
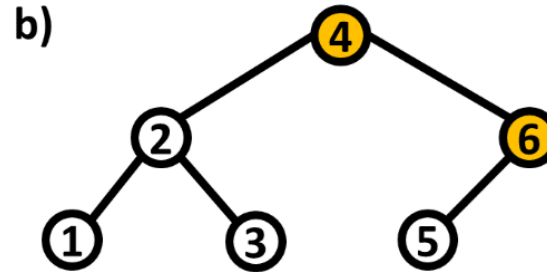
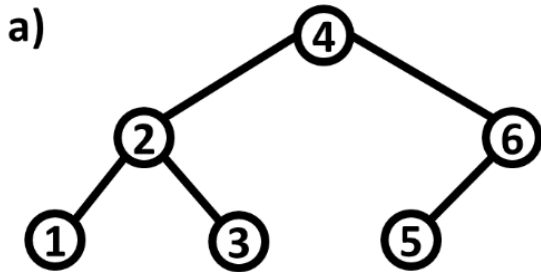
Jakou asymptotickou složitost má operace Find v B-stromě při použití binárního vyhledávání v uzlech?



Audience Q&A Session

① Start presenting to display the audience questions on this slide.

Pátá domácí úloha



Stavy na začátku prázdného BVS po provedení operací:

- a) vložení klíčů 4, 2, 1, 3, 6, 5 (v tomto pořadí),
- b) smazání klíčů 4 a 6 (jejich uzly zůstávají, pouze se označí jako smazané),
- c) Compact, který následuje po dokončení druhé operace Delete, protože součet výšek označených uzlů je $2+1=3$, zatímco součet výšek neoznačených uzlů je $0+1+0+0=1$. Pořadí preorder nesmazaných klíčů je pro stromy b) a c) totožné.



Audience Q&A Session

① Start presenting to display the audience questions on this slide.