Algoritmizace

Marko Genyg-Berezovskyj, Daniel Průša

2010 - 2024

Přehled

- Merge sort, binární halda, Heap sort
- Radix sort, Counting sort
- Tipy k HW_02

Please download and install the Slido app on all computers you use

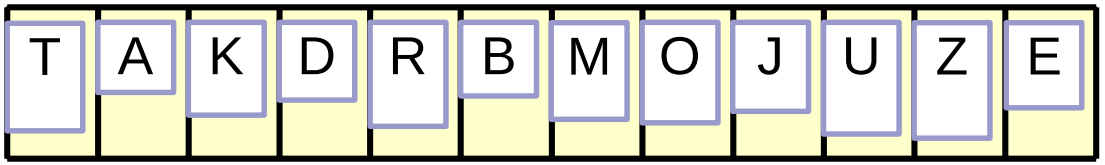
Join at slido.com #5749681

ⓘ Start presenting to display the joining instructions on this slide.

Merge sort (řazení slučováním)

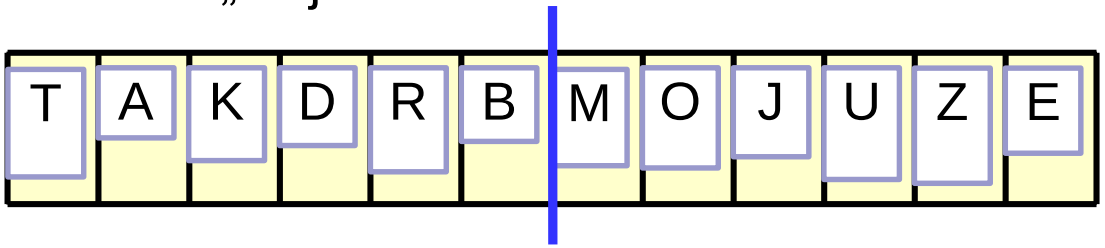
- John von Neumann (1945), technika rozděl a panuj

Vstup



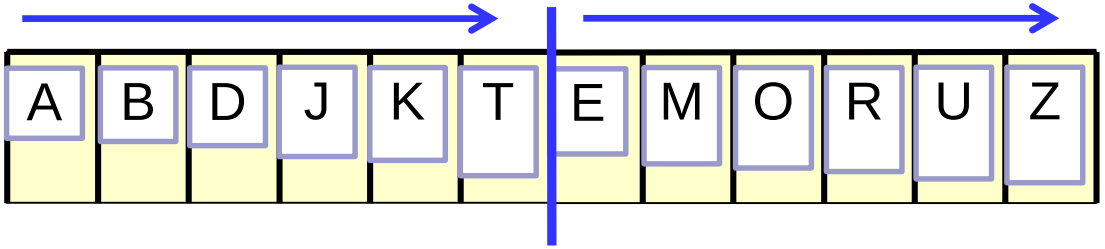
Vstup rozdělíme na 2 „stejně velké“ části

Rozděl



a každou část seřadíme rekurzivně.

2x rekurze

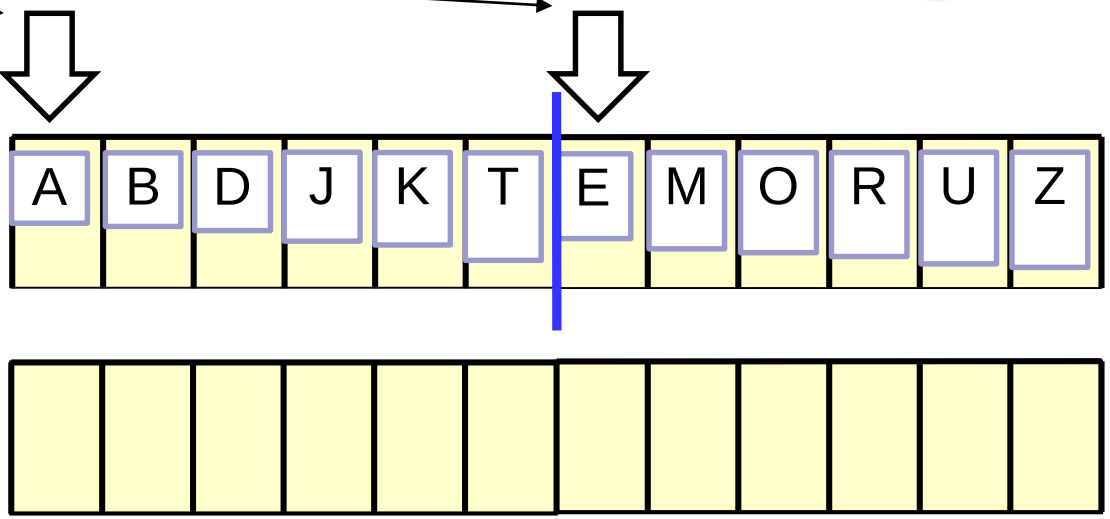


Nakonec obě části sloučíme v lineárním čase.

Merge sort

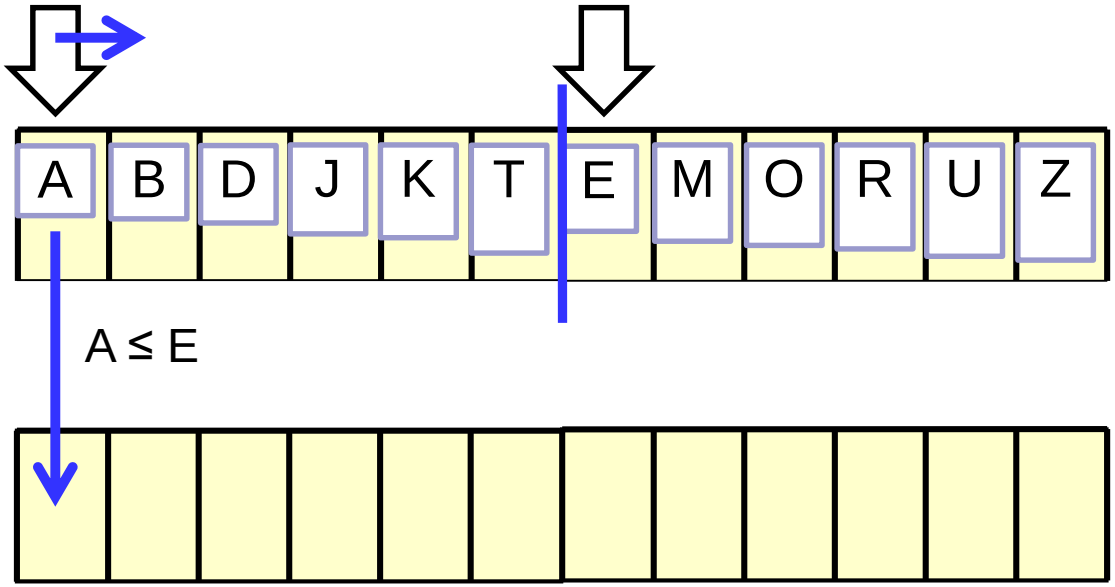
Ukazatel na první nesloučený prvek v levé/pravé části

Sluč, inicializace



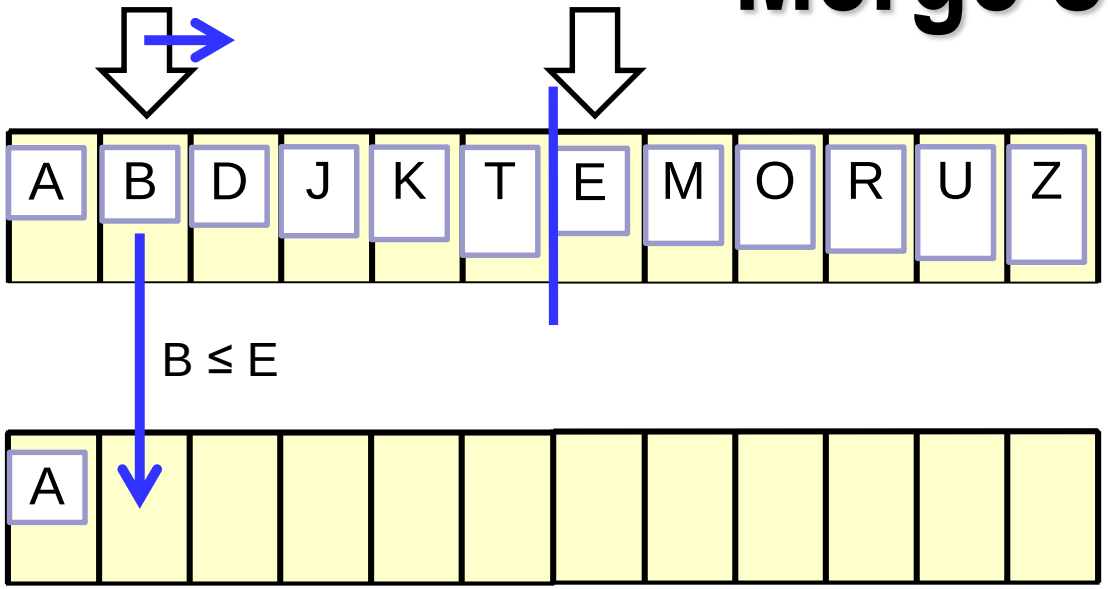
Pomocné pole

Sluč, 1. krok



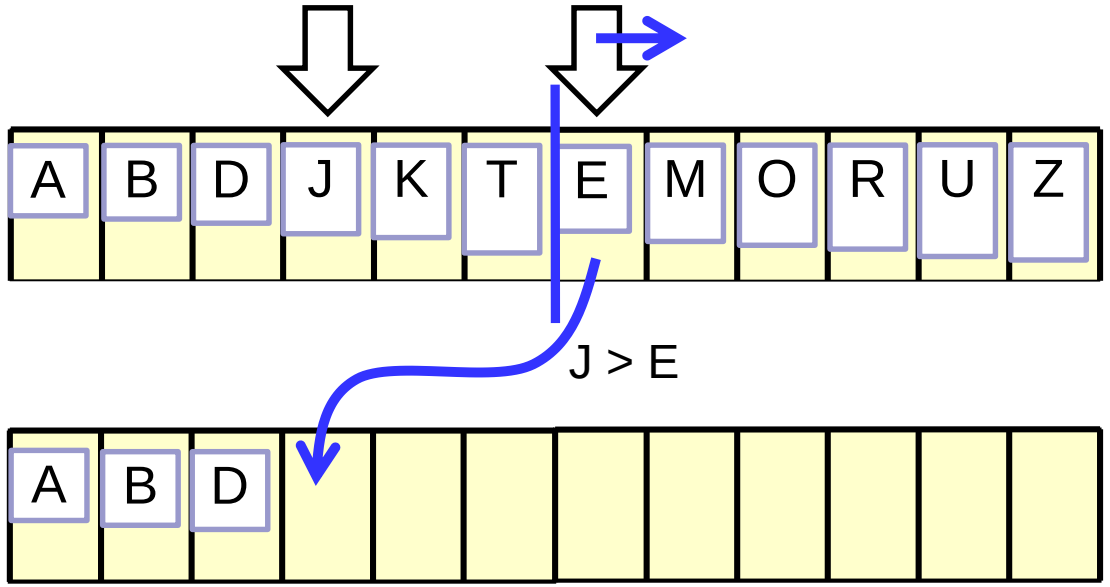
Merge sort

Sluč, 2. krok



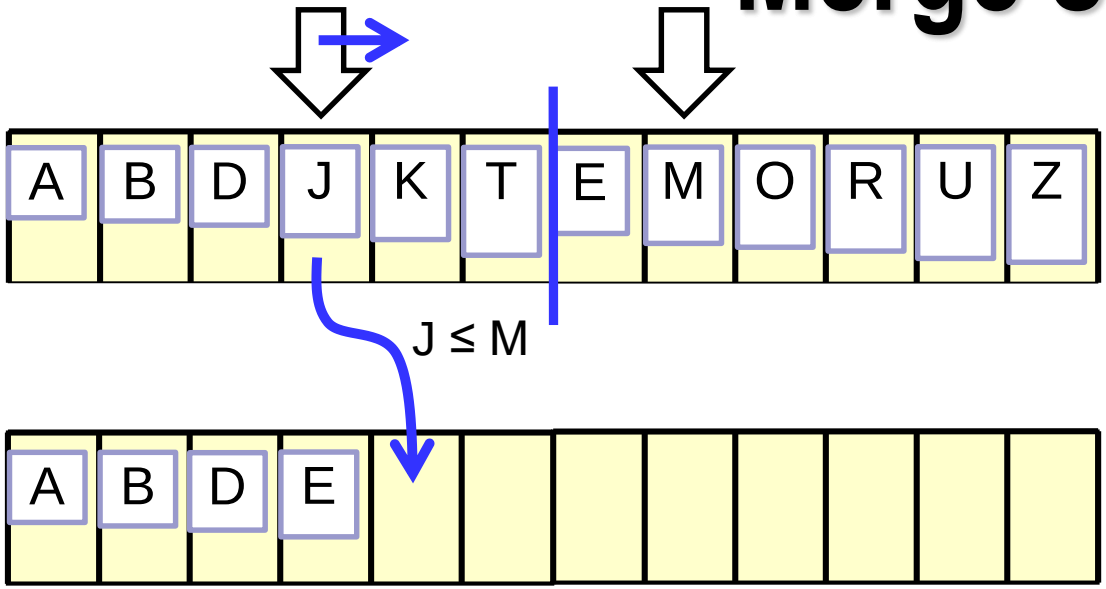
…

Sluč, 4. krok



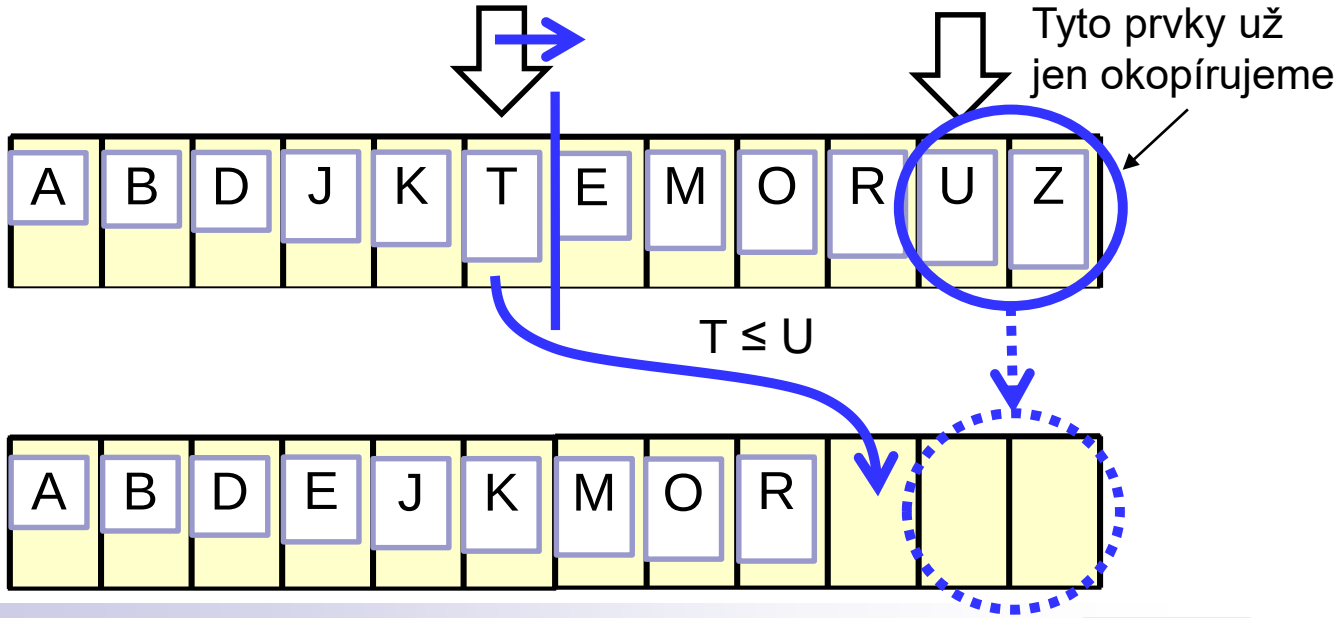
Merge sort

Sluč, 5. krok

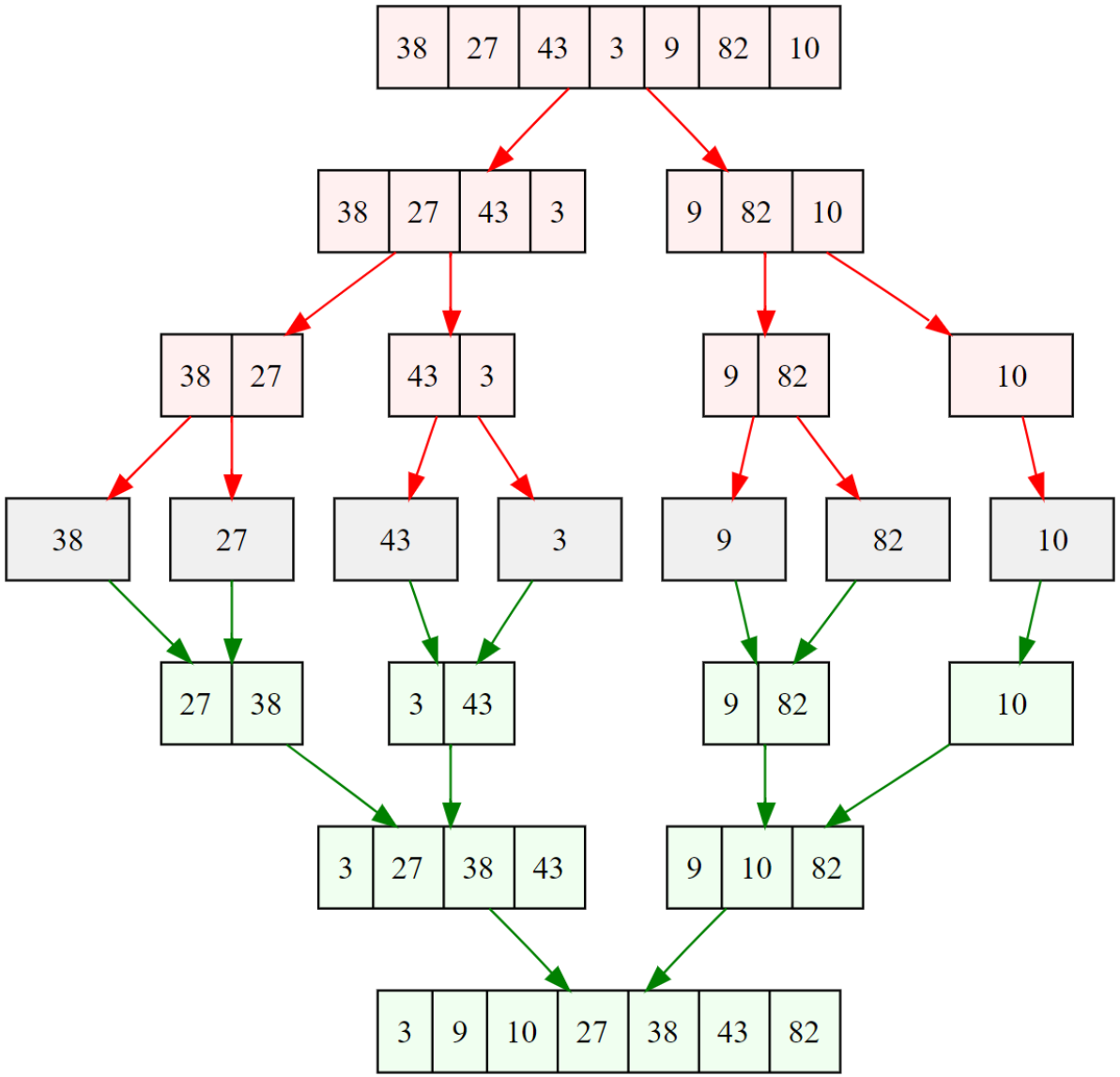


…

Sluč, 10. krok



Merge sort



rekurzivní dělení

triviální případy

slučování (merge)

Merge sort

```
void merge(int[] in, int[] out, int low, int high) {
  int half = (low+high)/2;
  int i1 = low;
  int i2 = half+1;
  int j = low;

                                    // compare and merge
  while ((i1 <= half) && (i2 <= high)) {
    if (in[i1] <= in[i2]) { out[j] = in[i1]; i1++; }
    else { out[j] = in[i2]; i2++; }
    j++;
  }
                                    // copy the rest
  while (i1 <= half) { out[j] = in[i1]; i1++; j++; }
  while (i2 <= high) { out[j] = in[i2]; i2++; j++; }
}
```

Merge sort

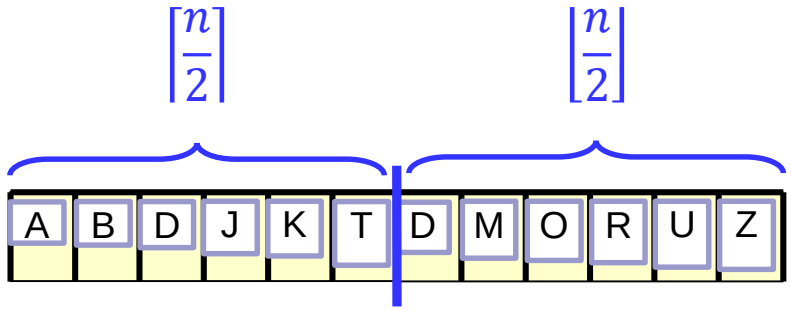
```
void mergeSort(int[] a) {
  int[] aux = Arrays.copyOf(a, a.length);
  mergeSort(a, aux, 0, a.length-1, 0);
}

void mergeSort(int[] a, int[] aux,
               int low, int high, int depthMod2) {
  int half = (low+high)/2;
  if (low >= high) return;

  mergeSort(a, aux,    low, half, 1-depthMod2);
  mergeSort(a, aux, half+1, high, 1-depthMod2);

                // note the exchange of a and aux
  if (depthMod2 == 0) merge(aux, a, low, high);
  else                merge(a, aux, low, high);
}
```

Merge sort

- Asymptotická složitost

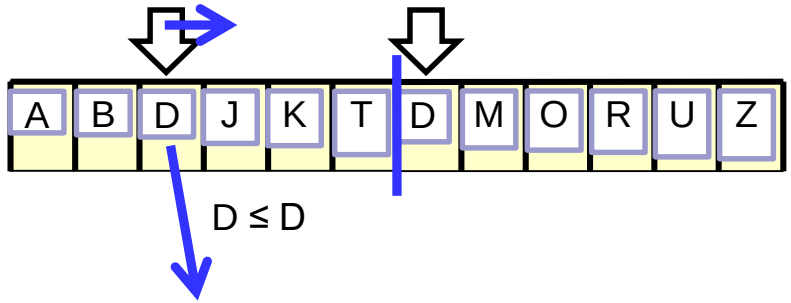
$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n), \quad n > 1$$

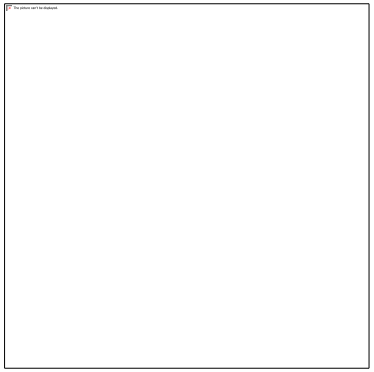


$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$ ... podle mistrovské věty

- Stabilita ✓
  - prvky se přesunují pouze při slučování
  - v případě rovnosti dvou prvků jejich relativní pořadí zachováme



Please download and install the Slido app on all computers you use



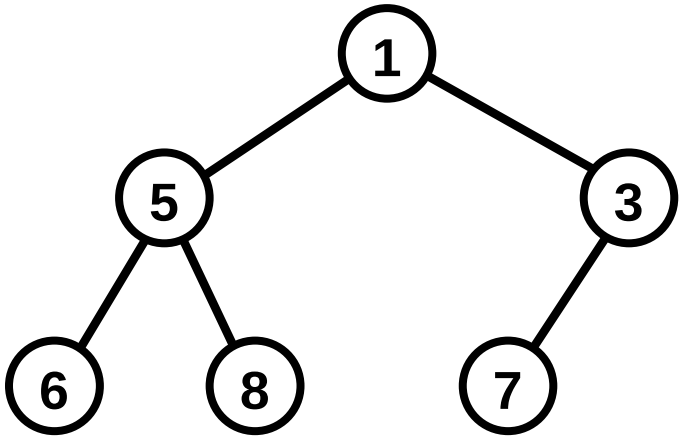
Audience Q&A

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

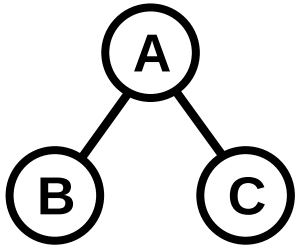
Binární halda

- Vyvážený binární strom
- Operace GetMin, DeleteMin, Insert
- Implementuje prioritní frontu

Vrchol haldy (kořen)
obsahuje minimum



min-halda

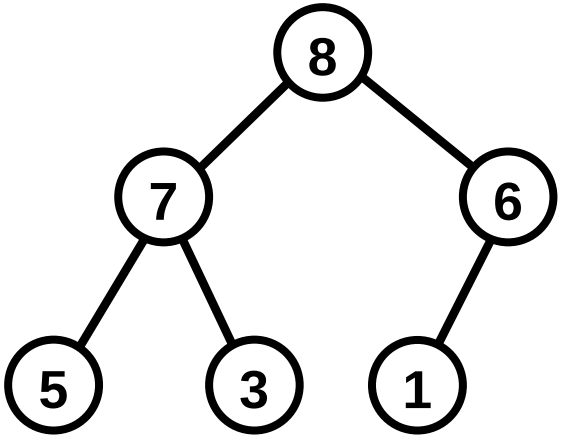


Podmínka min-haldy:

$A \leq B$ a $A \leq C$

(platí pro každý uzel)

alternativa:
max-halda
($A \geq B$ a $A \geq C$)

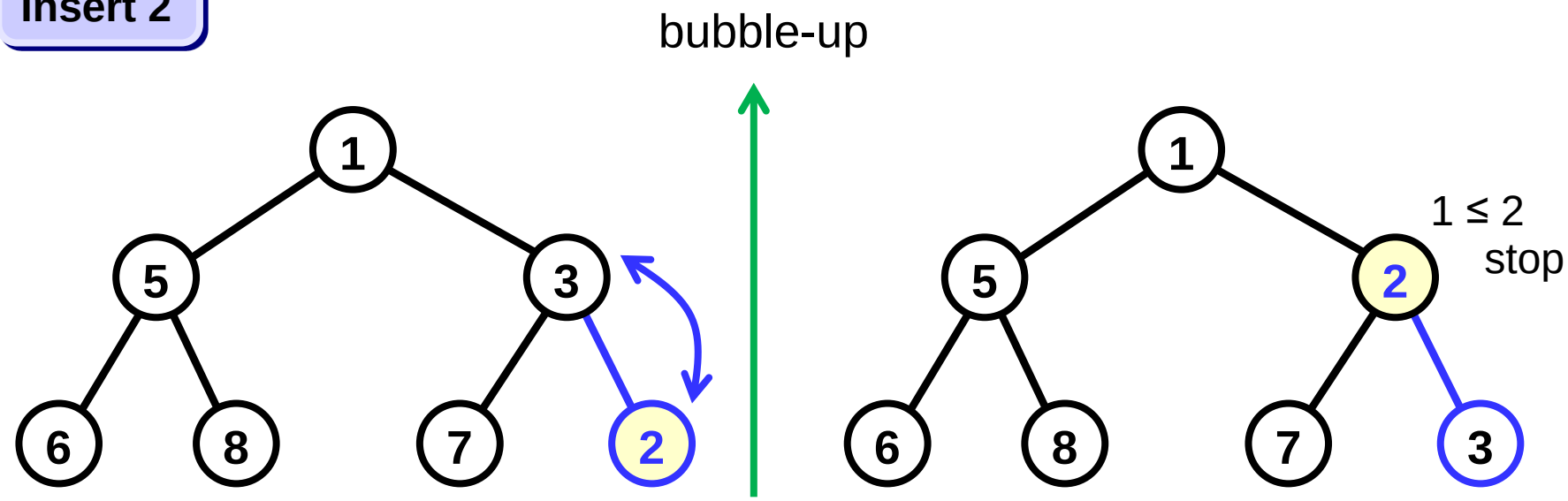


GetMax, DeleteMax

Insert v binární haldě

1. Nový prvek vložíme jako další list v pořadí
2. Na cestě ke kořeni kontrolujeme podmínku haldy a provádíme opravy (prohozením s rodičem)

Insert 2

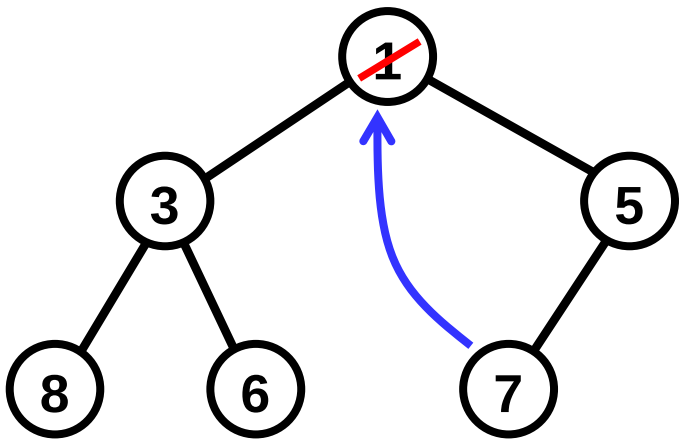


Časová složitost $O(\log n)$

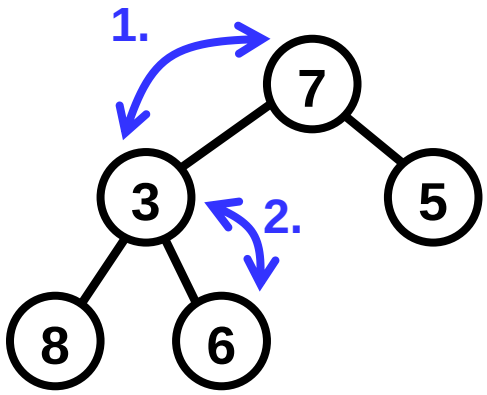
DeleteMin v binární haldě

1. Kořen nahradíme posledním listem
2. Na cestě od kořene k listům kontrolujeme podmínku haldy a provádíme opravy (prohozením s menším potomkem)

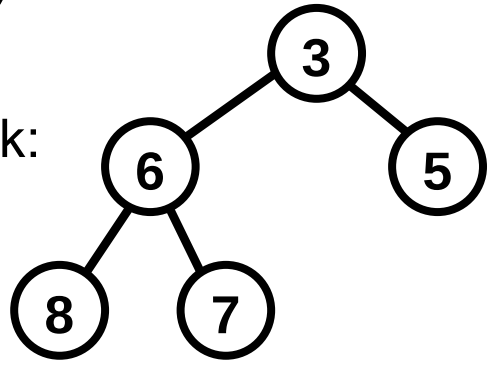
DeleteMin



bubble-down

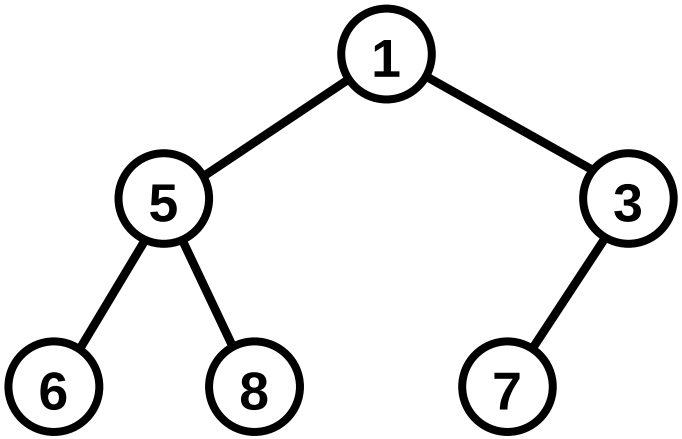


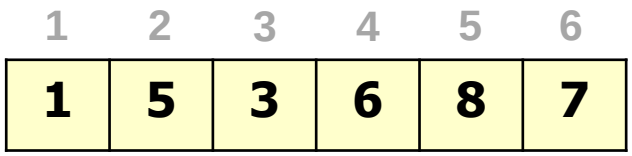
výsledek:



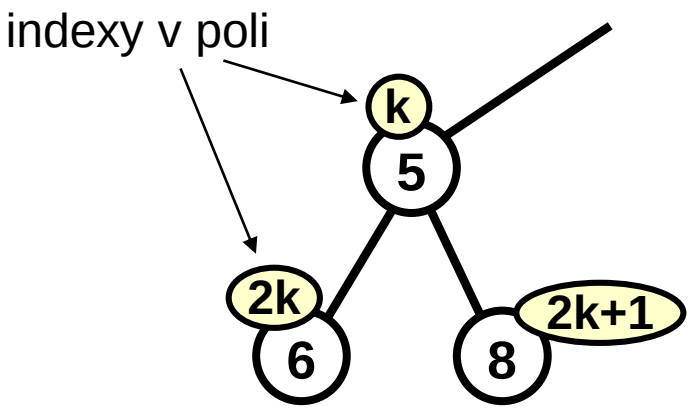
Časová složitost $O(\log n)$

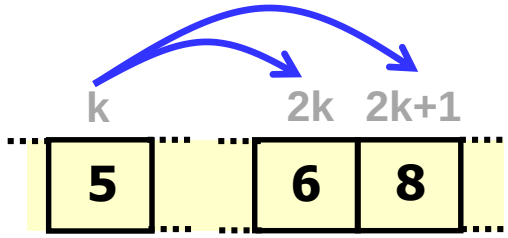
Reprezentace haldy v poli





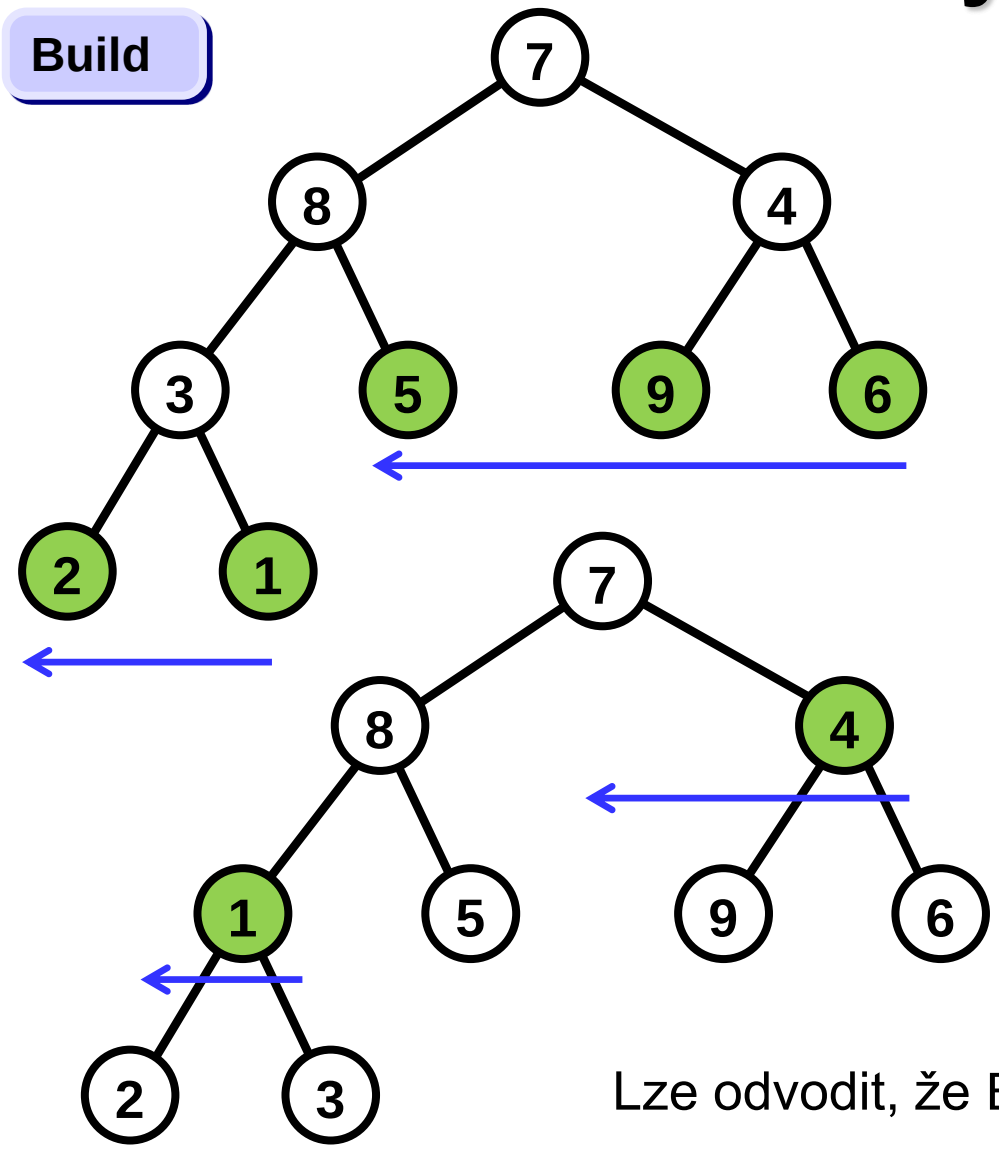
vrchol haldy je prvním prvkem pole





potomci prvku na indexu k jsou
na indexech 2k (levý) a 2k+1 (pravý)

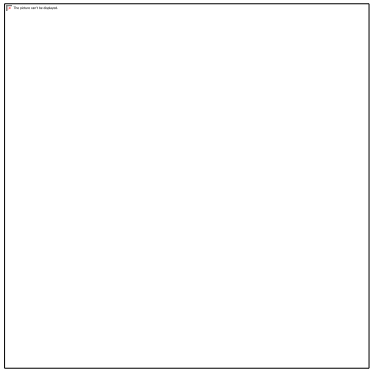
Vybudování haldy



- V poli reprezentujícím haldu postupujeme od posledního prvku k prvnímu.
- Podstrom zakořeněný v listu je halda.
- Pokud v podstromu je pravidlo haldy porušeno jen v jeho kořeni, napravíme to provedením bubble-down.

Lze odvodit, že Build má časovou složitost $\Theta(n)$.

Please download and install the Slido app on all computers you use

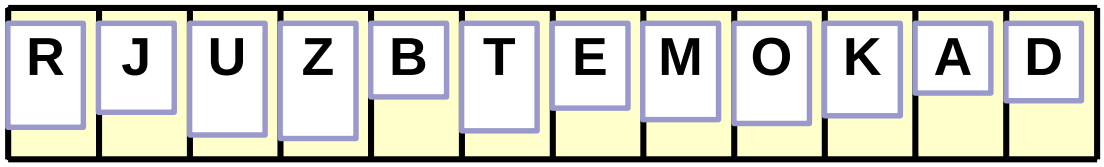


Proč je časová složitost operace Build pro binomiální haldu Θ(n)?

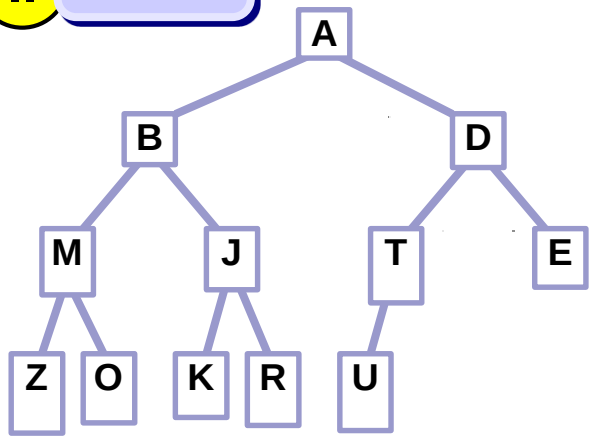
ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Heap sort (řazení haldou)

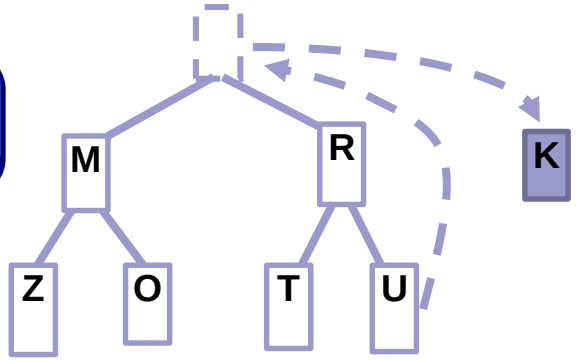
I Vstup

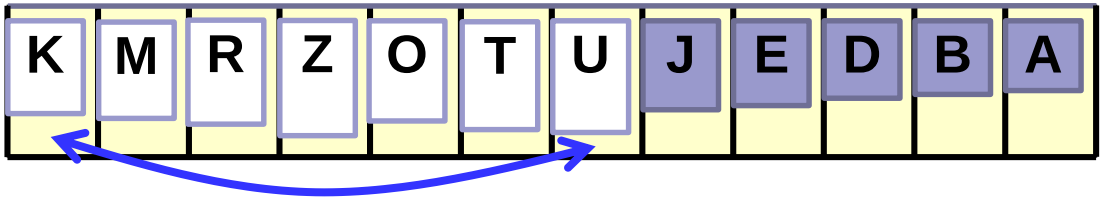


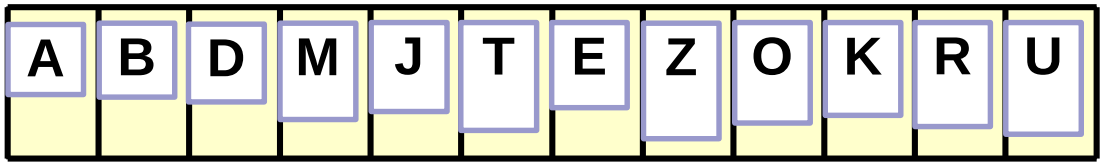
II Build



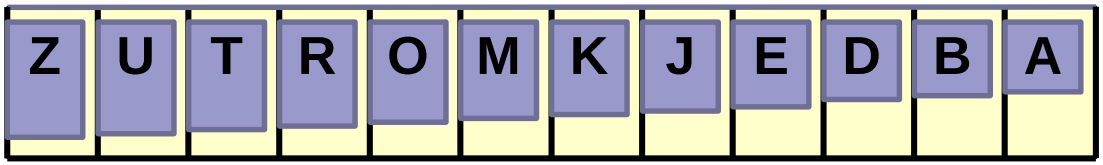
III for (i = 1; i <= n; i++)
DeleteMin;







IV Výstup



Heap sort

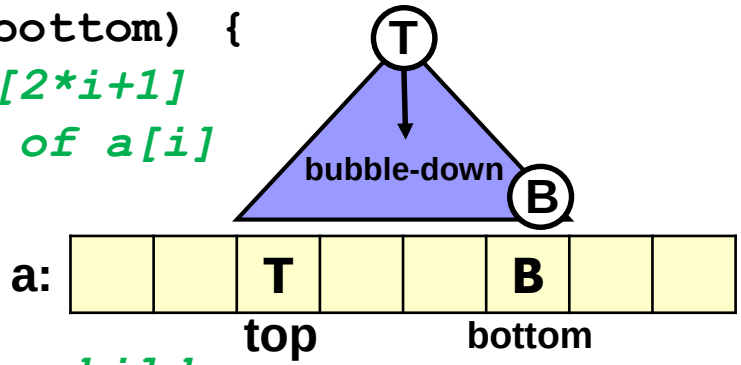
```
                                  // array: a[1]...a[n]  !!!!

void heapSort(Item[] a, int n) {

                                                  // create a heap
  for (int i = n/2; i > 0; i--)
    repairTop(a, i, n);                           // bubble-down

                                                  // sort
  for (int i = n; i > 1; i--) {
    swap(a, 1, i);                                // swap a[1] and a[i]
    repairTop(a, 1, i-1);                         // bubble-down
  }
}
```

II

III

Heap sort

```
                          // array:  a[1]...a[n]  !!!!!!
void repairTop(Item[] a, int top, int bottom) {
  int i = top;            // a[2*i] and a[2*i+1]
  int j = i*2;            // are children of a[i]

  Item topVal = a[top];

                          // select smaller child
  if ((j < bottom) && (a[j] > a[j+1])) j++;

                          // while (topVal > children)
                          //         move children up
  while ((j <= bottom) && (topVal > a[j])) {
    a[i] = a[j];
    i = j;  j = j*2;      // skip to next child
    if ((j < bottom) && (a[j] > a[j+1])) j++;
  }
  a[i] = topVal;          // put topVal where it belongs
}
```



Heap sort

- Asymptotická složitost pro vstupní pole délky n

  Build + n-krát DeleteMin

  $\Rightarrow \Theta(n) + O(n \log n) = O(n \log n)$

- Heap sort není stabilní

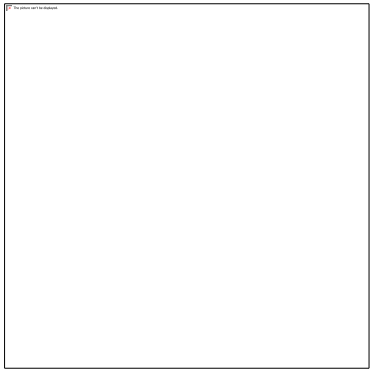
Empirické porovnání

Délka pole	% seř.	Doba běhu v milisekundách, není-li uvedeno jinak					
		Sort					
		Select	Insert	Bubble	Quick	Merge	Heap
10	0%	0.0005	★ 0.0002	0.0005	0.0004	0.0009	0.0005
10	90%*	0.0004	★ 0.0001	0.0004	0.0004	0.0007	0.0005
100	0%	0.028	0.016	0.043	0.081	0.014	★ 0.011
100	90%	0.026	★ 0.003	0.030	0.010	0.011	0.011
1 000	0%	2.36	1.30	4.45	★ 0.12	0.19	0.17
1 000	90%	2.31	0.18	2.86	0.16	★ 0.15	0.16
10 000	0%	228	130	450	★ 1.57	2.40	2.31
10 000	90%	229	17.5	285	1.93	★ 1.68	2.11
100 000	0%	22 900	12 800	45 000	★ 18.7	31.4	31.4
100 000	90%	22 900	1 760	28 500	27.4	★ 24.6	25.5
1 000 000	0%	38 min	22 min	75 min	★ 237	385	570
1 000 000	90%	38 min	2.9 min	47.5 min	336	★ 301	381

*90% prvků vstupního pole je na správné pozici

Prostředí: Intel(R) 1.8 GHz, Microsoft Windows XP SP3, jdk 1.6.0_16

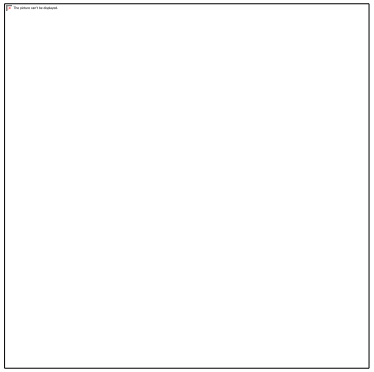
Please download and install the Slido app on all computers you use



Jaký je očekávaný počet fixních bodů v náhodně vygenerované permutaci n prvků, kde fixní bod je prvek, který zůstává na své původní pozici?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

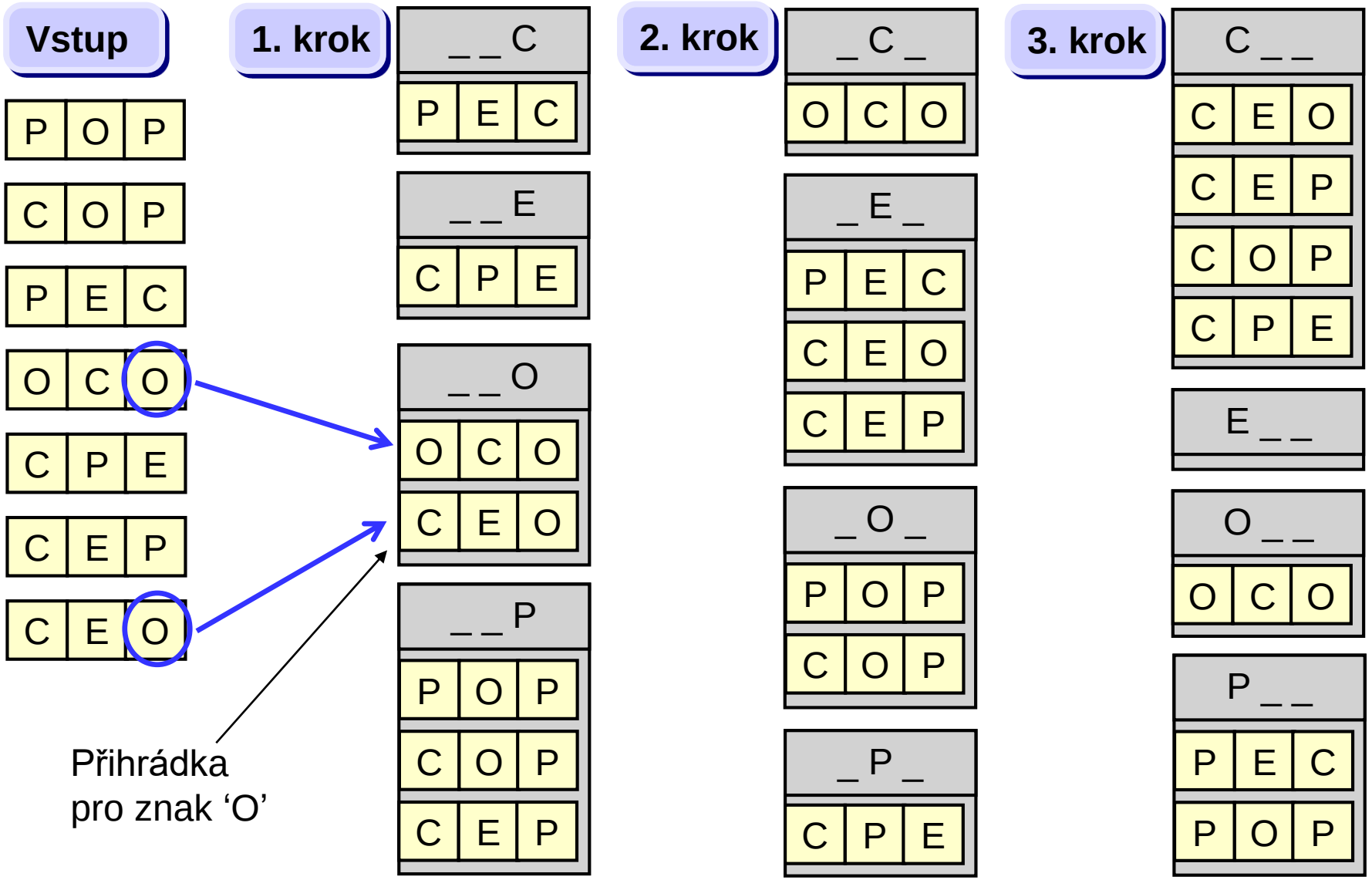
Please download and install the Slido app on all computers you use



Audience Q&A

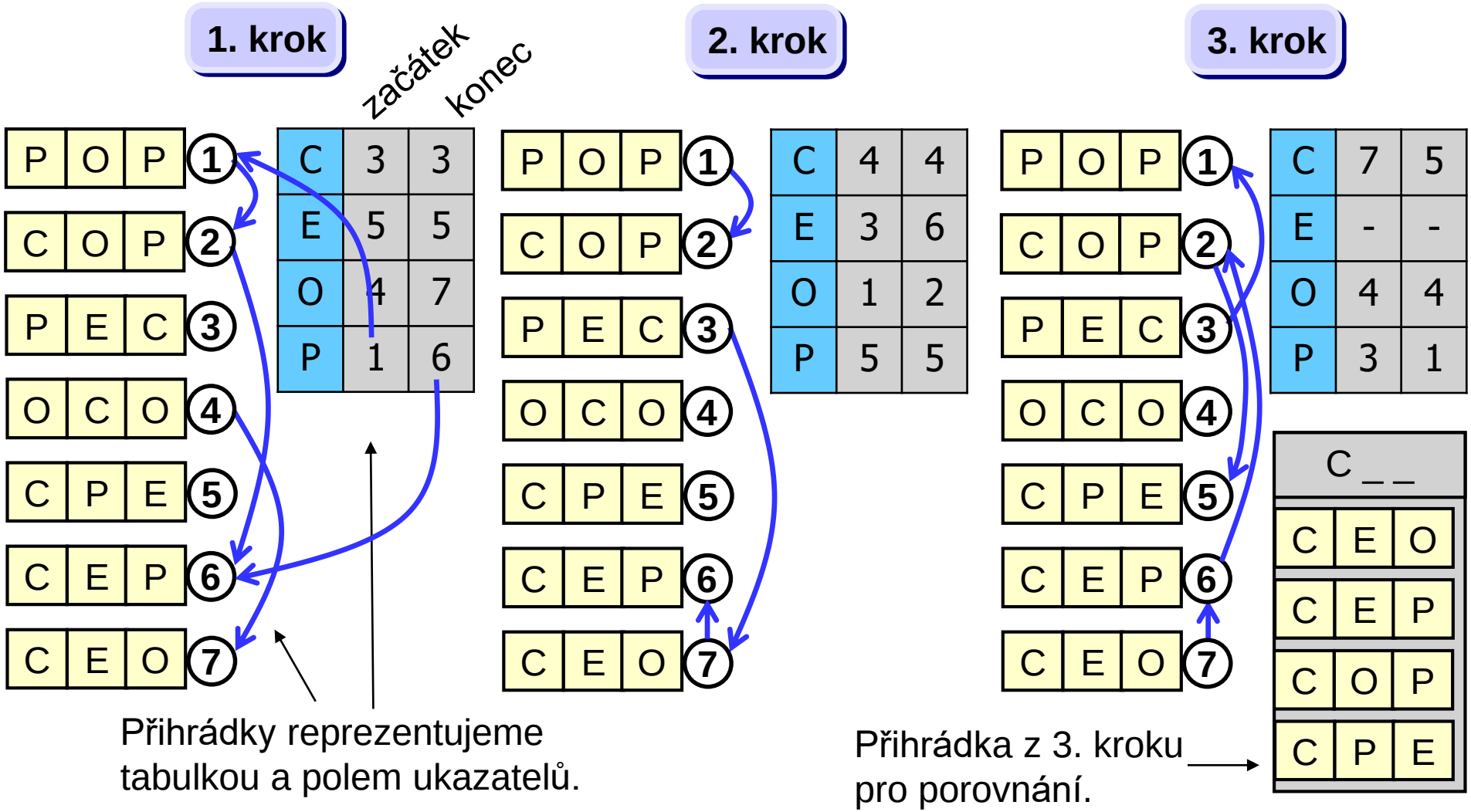
ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Radix sort (přihrádkové řazení)



Radix sort

- Implementace bez přesouvání vstupních dat



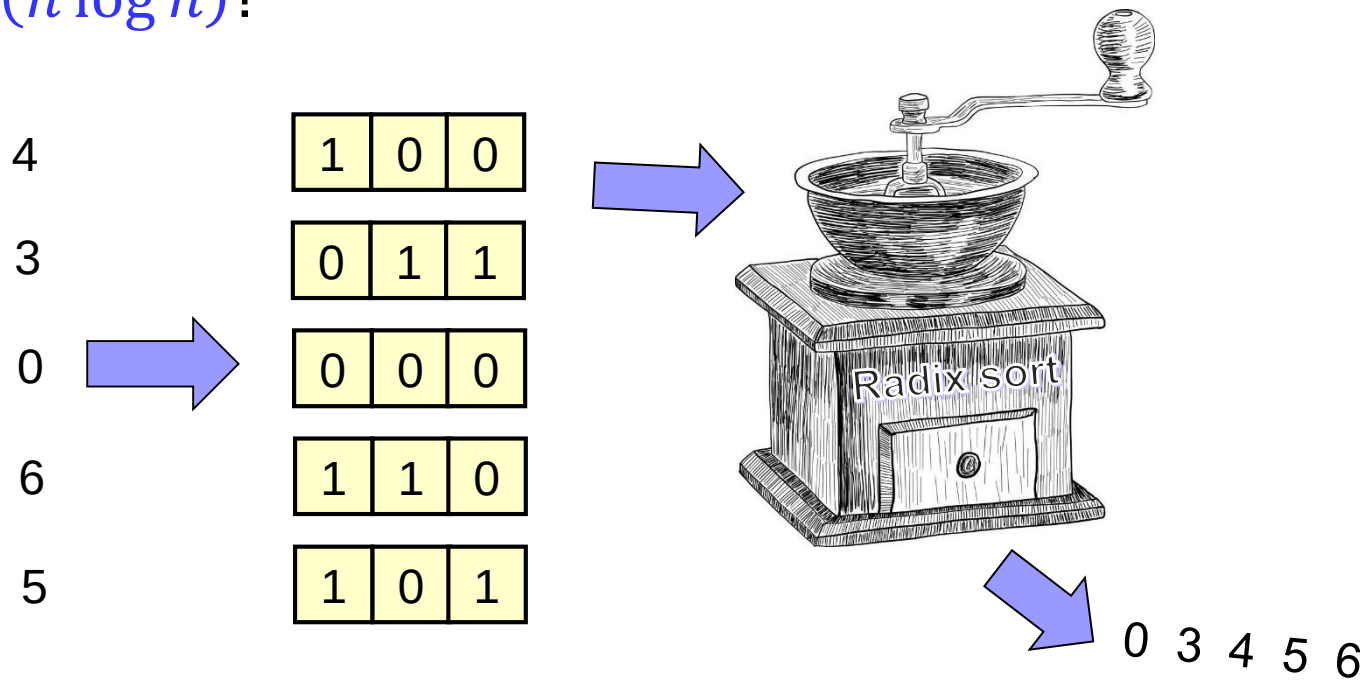
Radix sort

- Řadíme n řetězců délky k nad abecedou Σ.
- Časová složitost:
  - jeden krok … $\Theta(n + |\Sigma|)$
  - k kroků … $\Theta\big(k \cdot (n + |\Sigma|)\big) = \Theta(k \cdot n)$ (pro fixní abecedu)
- Stabilní řazení.

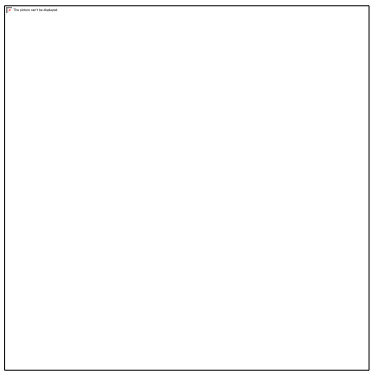
Radix sort – zamyšlení

Každé celé nezáporné číslo můžeme vyjádřit jako binární řetězec (doplněný zleva nulami pro dosažení jednotné délky).

Pokud setřídíme n různých celých nezáporných čísel pomocí Radix sortu, dosáhneme lepší asymptotické složitosti než $O(n \log n)$?



Please download and install the Slido app on all computers you use

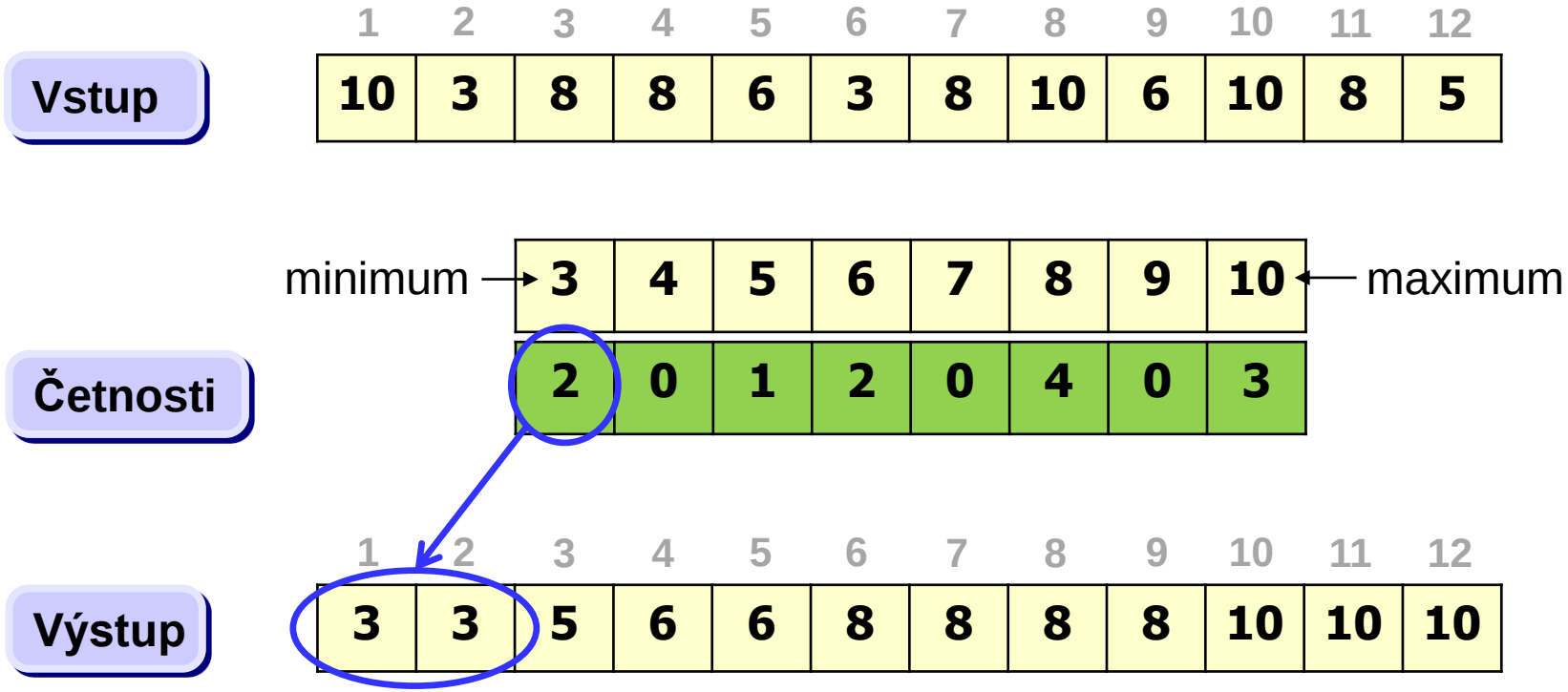


Audience Q&A

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

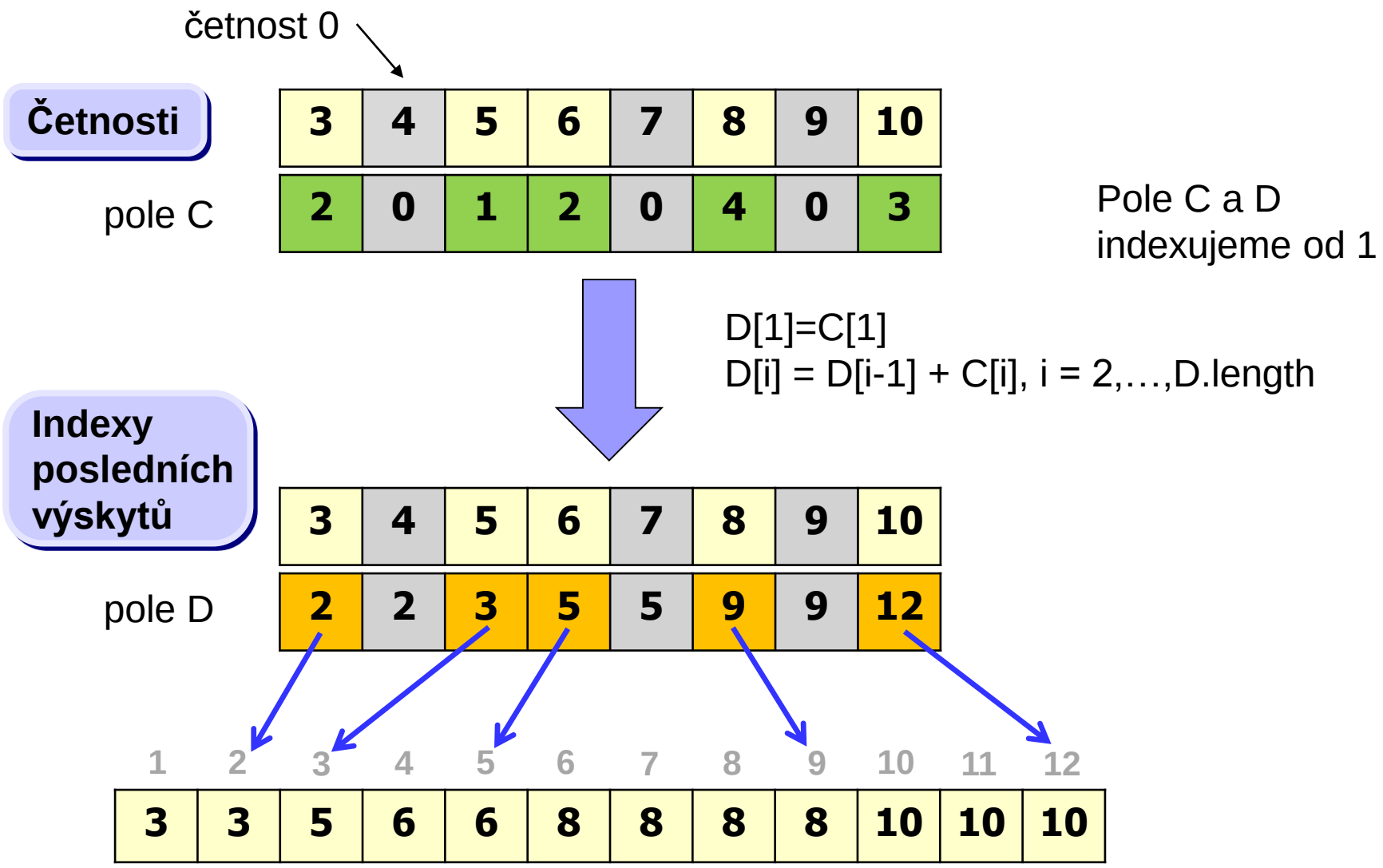
Counting sort (řazení počítáním)

- Vhodný pro řazení velkého pole prvků nabývajících jen malého počtu různých diskrétních hodnot.

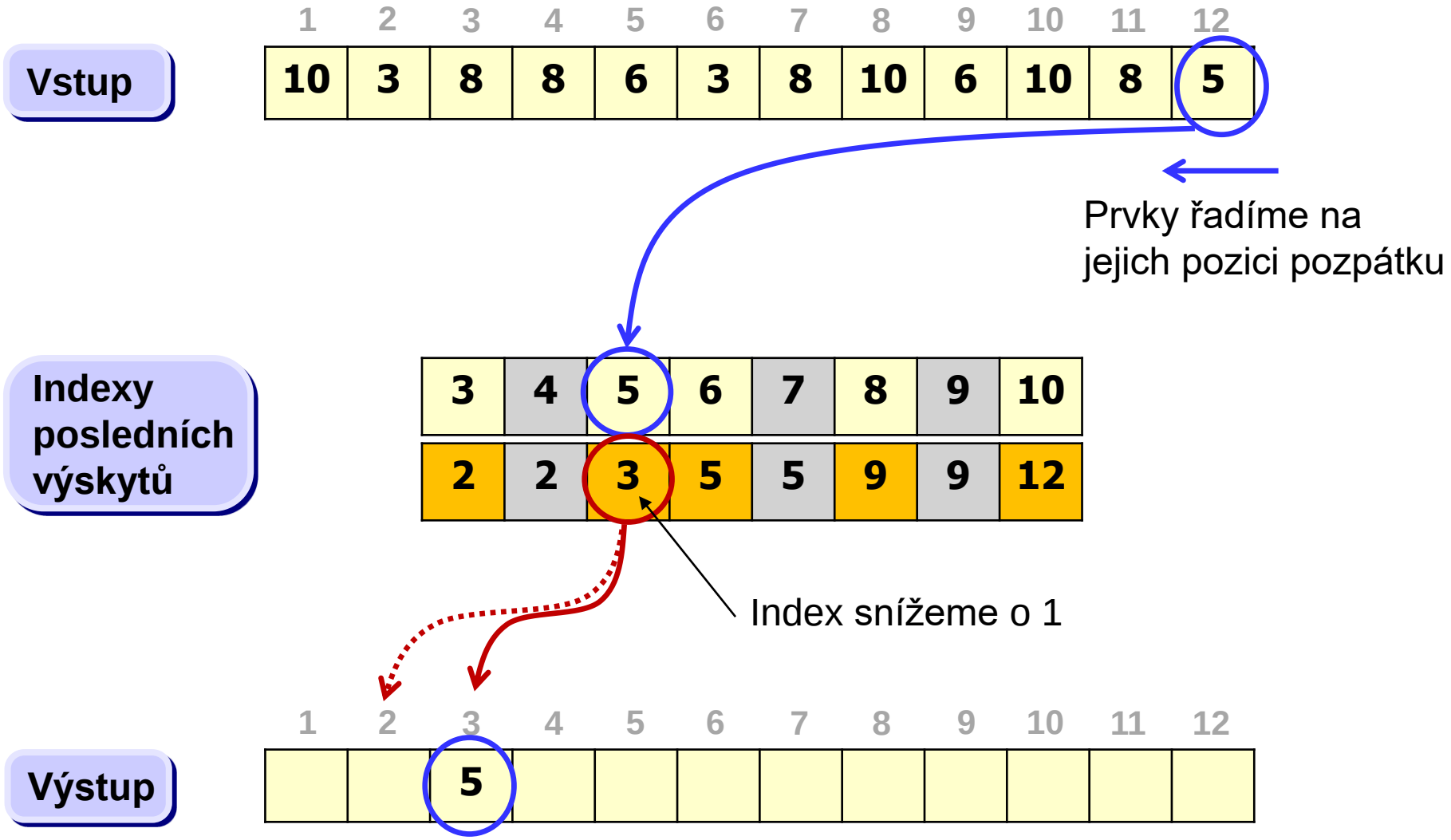


Pokud ale řadíme objekty, musíme postupovat jinak.

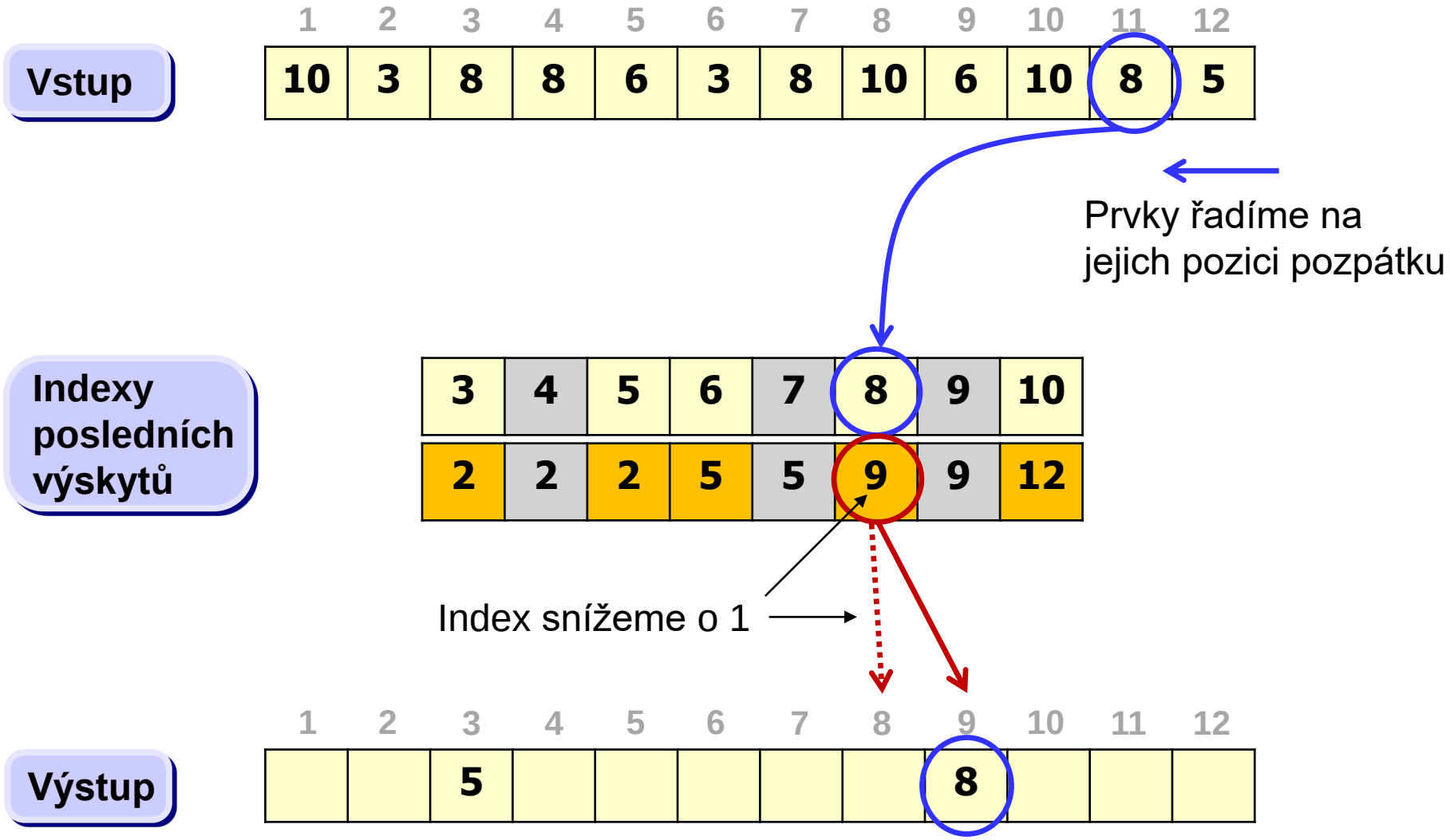
Counting sort



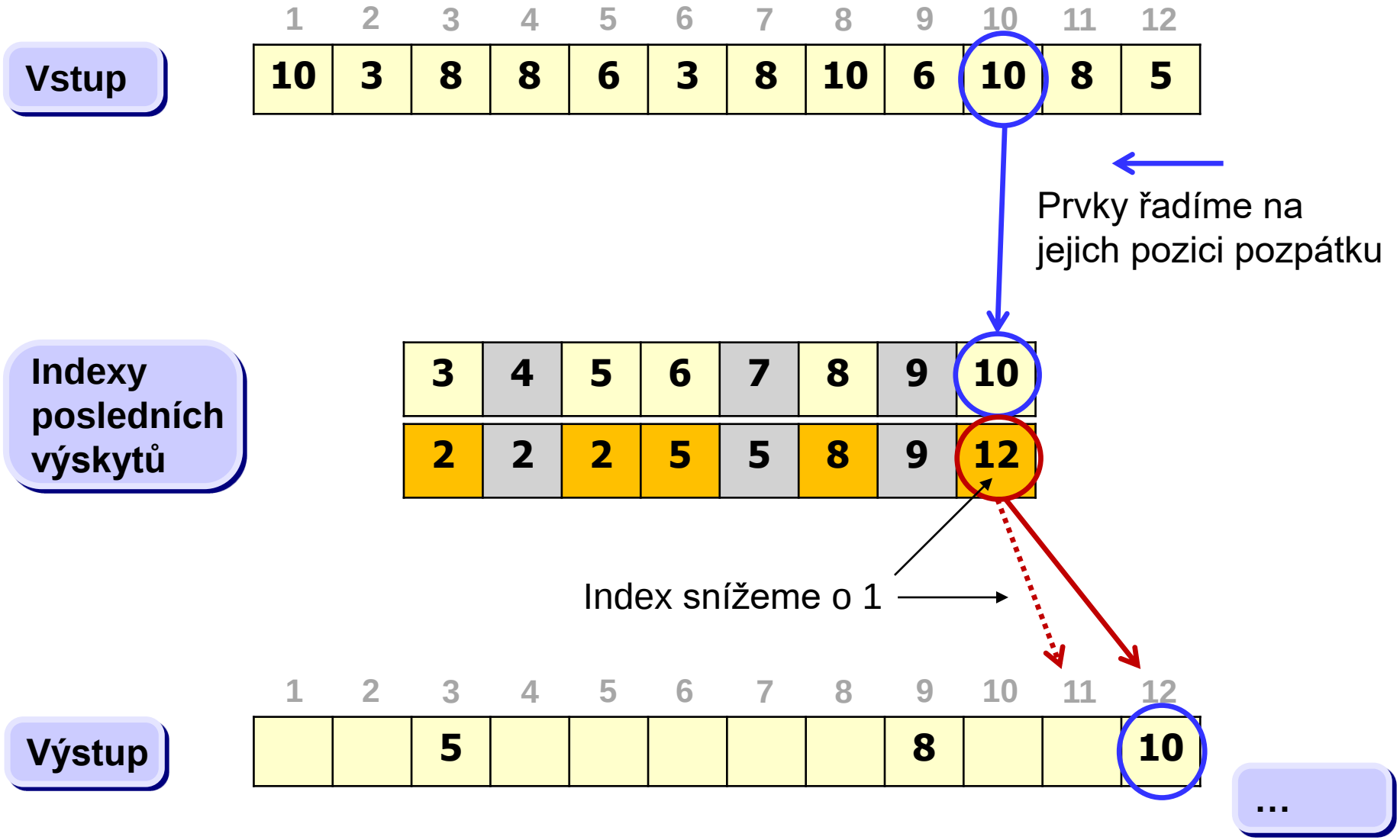
Counting sort



Counting sort



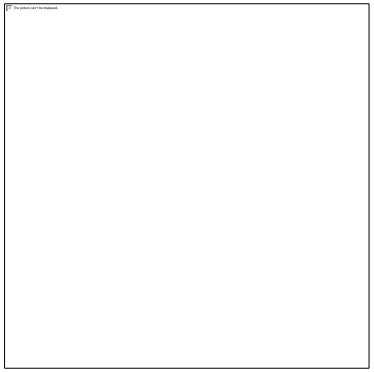
Counting sort



Counting sort

- Řadíme n prvků jejichž celočíselné klíče jsou z intervalu délky m.
- Časová složitost je $\Theta(n+m)$.
- Místo pole četností lze použít HashMap.
- Stabilní řazení.

Please download and install the Slido app on all computers you use



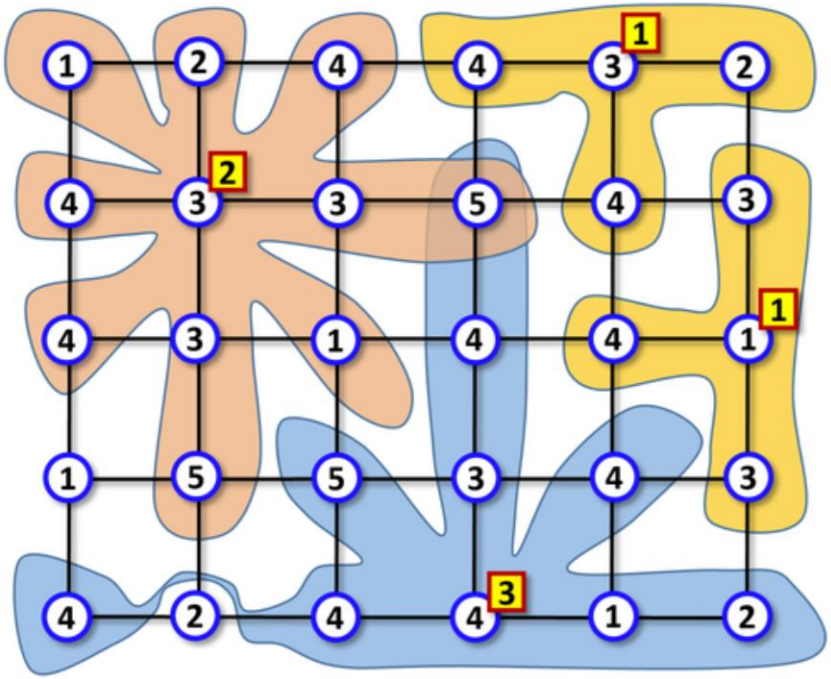
Audience Q&A

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Druhá domácí úloha

Horní odhad pro ořezávání (zbývá umístit S sond s max. dosahem D):

1. Pro každou neumístěnou sondu zjistím, kolik nových bodů maximálně pokryje (pouze s ohledem na již umístěné sondy).
2. Naleznu S různých bodů, které dávají nejvyšší přírůstky pokrytí pro sondu s dosahem D.



Druhá domácí úloha

Platí R x C ≤ 64 ⇒ viditelné či pokryté body lze reprezentovat v bitech 64-bitové hodnoty.

A .. pokryté body

B .. viditelnost pro konkrétní sondu na konkrétní pozici

nově pokryté body: B & ~A (B and not A)

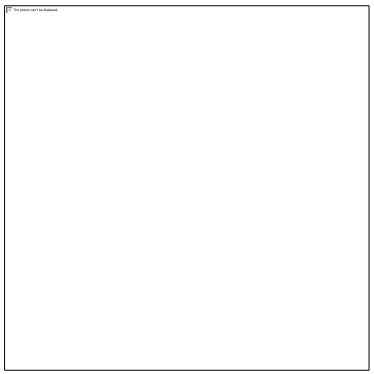
Java:

Long.bitCount(long x)

C++:

__builtin_popcountll(long long x)

Please download and install the Slido app on all computers you use



Audience Q&A

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.